Cálculo Numérico I

Manuel Bernardino Lino Salvador

São Cristóvão/SE
2009

Sumário

Sumário

Os números e o computador

META

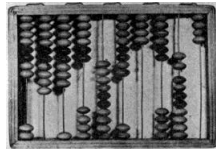
Associar os conceitos de algoritmo, representação dos números no computador e implementar cálculos usando algoritmos.

OBJETIVOS

Identificar os tipos de algoritmos, as propriedades e a forma de armazenamento na memória do computador.

1.1 Introdução

Com o aparecimento dos computadores na década de 40, muitos problemas foram resolvidos através da aplicação de métodos numéricos, o que antes sem a utilização das máquinas eram inviáveis pelo grande esforço de cálculo manual.

Os homens, através do tempo, preocupam-se com formas de facilitar os cálculos, exemplos: o ábaco, inventado pelos babilônios, e os kipus inventado pelos incas.

Ábaco

Kipus

A tecnologia dos computadores foi avançando cada vez mais, em termos de exatidão e tempo de execução das instruções, porém as propriedades da aritmética Real não são válidas quando são executadas no computador, pois a memória do computador é finita.

A matemática aborda estes problemas no ramo da Análise Numérica e Cálculo Numérico.

A UFS como outras universidades federais, tiveram computadores desde os anos de sua fundação, do tipo IBM, 1130, 360, 3090, e computadores pessoais Cobra, Itautec e outros. Só para ter uma idéia o IBM 1130 tinha 8 Kb de memória Ram, mas nessa configuração, rodava-se o sistema acadêmico, folha de pagamento e vestibular, claro o número de usuários era bem menor. Épocas do cartão perfurado, a linguagem utilizada era o FORTRAN Comercial.

IBM 1130

IBM 360

IBM 3090

O estudo da matemática pode ser visto sob dois grandes aspectos:

Matemática **Pura** e
Matemática **Aplicada**.

Dentro da matemática Aplicada encontra-se a Matemática Computacional. Esta usa como ferramenta o computador e utiliza-se da Teoria da Computação, da Teoria da Informação e da Teoria dos Algoritmos.

A matemática computacional pode ser dividida em três áreas:

Matemática **Simbólica**
Matemática **Gráfica**
Matemática **Numérica**

A matemática **Simbólica** trata dos dados em forma literal, obtendo uma solução exata não numérica. É também chamada de matemática não-numérica. Por exemplo, provar teoremas utilizando o computador para construir ou verificar seqüência de inferência lógica que conduzam à demonstração.

A matemática **Gráfica** trabalha com dados de forma gráfica e o resultado também é um gráfico. As aplicações podem ser divididas em três áreas: Processamento de imagens, Reconhecimento de Padrões e computação Gráfica Gerativa.

A matemática **Numérica** trata da solução de problemas matemáticos através do computador e dar como resultado aproximações numéricas. Ela engloba várias disciplinas, tais como: Cálculo Numérico, Análise Numérica, Aritmética Computacional, Álgebra Numérica, Estatística Numérica, etc.

O **Cálculo Numérico** usa métodos construtivos para a solução dos problemas, e utiliza só operações aritméticas elementares { +, -, *, / } e através delas são implementadas as demais operações mais complexas. A forma como é implementada no computador, o processo de cálculo para a solução do problema denomina-se **Algoritmo**.

Algoritmo, em geral, é uma seqüência finita de passos e operações ordenadas que levam à solução de um problema.

Os algoritmos podem ser **numéricos** e **não numéricos**. Os algoritmos numéricos são aqueles que utilizam operações aritméticas.

Exemplos de algoritmo não numérico:

- Uma receita de bolo
- Trocar um pneu de um carro
- Construir uma casa

Exemplos de algoritmo numérico

- Multiplicar duas matrizes Anxp * Bpxm
- Calcular o sen(x) por uma soma de Taylor
- Calcular as raízes de um polinômio de grau 2

Um algoritmo de boa qualidade deve ter as seguintes características:

1. Inexistência de erro lógico
2. Inexistência de erro operacional
3. Quantidade finita de cálculos
4. Critério de exatidão
5. Independência da máquina
6. Os limites do erro devem convergir a zero
7. Eficiência

1.2 Tipos de Algoritmos

Algoritmo por computação discreta

É obtido por uma seqüência de computações elementares.

Exemplo: Algoritmo de Báskara

Algoritmo por enumeração

É o tipo de algoritmo que experimenta todas as possíveis respostas em uma certa ordem para encontrar a melhor solução do problema.

Exemplo: Busca do melhor caminho em grafos.

Algoritmo iterativo

O algoritmo iterativo ou repetitivo encontra uma série de respostas aproximadas que gradualmente vão se aproximando da resposta cor reta até que um critério de parada seja atingido por exatidão ou número de repetições.

Exemplo: Gera em forma repetitiva uma seqüência de valores, que deverá se aproximar à solução. Terá essa seqüência uma propriedade de convergência. Algoritmo de Newton para zeros de funções.

Algoritmo por divisão e conquista

O problema é dividido em vários subproblemas do mesmo tipo, mas menores, que podem ser resolvidos diretamente ou subdivididos novamente, usa-se esta técnica, até que todos os subproblemas possam ser resolvidos.

Exemplo: Dado um intervalo [a,b] onde uma função continua troca de sinal, f(a)*f(b) < 0. Encontrar o f(c)=0. O algoritmo da bisseção divide o intervalo na metade e verifica nas partes onde continua trocando de sinal, descartando a outra parte.

Algoritmo por tentativa e erro

Este algoritmo procura uma possível solução(tentativa). Caso esta não seja (erro), volta à busca segundo novos critérios. E assim por diante.

Exemplo: Encontrar o menor n tal que (n2 +1)/n! < 10-5, para n Z,

Algoritmo guloso

Este algoritmo é usado em problemas de combinatória, onde se busca uma solução rápida. Em um processo de escolha sempre é eleito o mais barato.

Exemplo: Na busca de caminhos em grafos por camadas, em cada expansão de um nó escolhe-se o menor se é custo, ou o maior se é lucro. A solução não é a melhor, mas ela é sub-ótima.

1.3 Solução de um Problema usando o Computador

Para resolver um problema utilizando o computador devemos seguir pelo menos as seguintes etapas:

1. **Selecionar a área** onde se encontra o problema no mundo real.
2. **Formalizar o problema**, levantando informações relevantes ao sistema, com a finalidade de estabelecer um modelo que se aproxime ou simule tal problema.
3. **Modelação do problema**, neste nível deve ser feita a abstração dos dados, identificando-se objetos, operações, e variáveis.
4. Escolha do **algoritmo eficiente**, definindo a estrutura lógica do algoritmo.
5. **Implementação do algoritmo**, neste nível escolhe-se a máquina e a linguagem a ser utilizada para a definição física e programação do algoritmo.
6. **Validação dos resultados**.

1.4 Representação dos números no computador

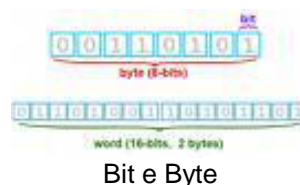
O computador é construído ao redor de uma Unidade Central que compreende:

Memória Central
Unidade de Cálculo (aritmética e lógica)
Unidade de Controle
Unidades de entrada e saída

A **memória central** está composta de um conjunto de células elementares idênticas (BIT), agrupadas em número de capacidade fixa; cada grupo representa um BYTE de oito pontos magnéticos; estes grupos estão numerados de zero a n, e o número de cada um deles é denominado endereço.

O armazenamento dos números é feito nestes grupos de células. Numa máquina digital, cada célula tem dois possíveis estados, que podem ser representados como positivo e negativo, ligado ou desligado e 0 ou 1.

Na memória do computador cada número é armazenado em um conjunto fixo de bits, sendo o primeiro o bit de sinal.

Bit e Byte

Existem dois modelos de representação dos números: Ponto fixo e Ponto flutuante.

O sistema de ponto fixo é representado em duas partes; uma parte inteira e outra fracionária em uma certa base numérica. A notação é **P(b,n,f)** onde **b** é a base utilizada, **n** o número de dígitos da parte fracionária **f**.

Este sistema não funciona para números muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, o número de Avogadro 0.60225x1023 moléculas por mol não poderia representar-se neste sistema. A implementação desta representação como produto de uma fração e potência de 10 está no sistema de ponto flutuante.

Definição 1. - Um número X que é representado em ponto flutuante tem a forma:

X = m be ; m (-1,-0.1] [0.1,1) ; e Z

onde:

m é a parte fracionária chamada mantissa
b é a base numérica utilizada
e é o expoente ou característica

Exemplo:
Se N=234,789, X= 0,234789 x 103 ou X=0,00234789 x 105

Definição 2. - Um número ponto flutuante está na forma normal (normalizado) se o valor da mantissa **m** pertence ao intervalo (-1,-0.1] [0.1,1).
Exemplo:
Se X = 0.0154 x 10-2, a forma normalizada é igual a 0.154 x 10-3

Definição 3. - Diz-se que um número representado em ponto flutuante está na "Forma Standard t dígitos na mantissa" se ele está normalizado e esta mantissa tem exatamente t dígitos. Se a mantissa tiver mais de t dígitos então arredondar o dígito t+1 assim:

Se o (t+1)-ésimo dígito for igual ou maior que 5 então o t-ésimo dígito é incrementado em 1.

Em outro caso, os t primeiros dígitos são considerados como mantissa.

O sistema de ponto flutuante é representado por **F(b,t,e1,e2)** onde:

b é a base
t o número de dígitos na mantissa
e1 é o menor expoente
e2 é o maior expoente

Exemplos:
1. Seja t=8, N=0,8934572834 o número está normalizado t dígitos na mantissa como X=0,89345728 x 100
2. Seja t=5, N=3,14159 então X=0,31416 x 10

lino@ufs.br

Como se pôde observar nestes dois casos os números originais não puderam estar representados completamente para esses computadores hipotéticos, por tanto os valores armazenados são aproximados.

1.5 Resumo

Nesta aula, você verificou que o armazenamento dos números nem sempre é exata quando eles são transformados para uma base diferente da decimal. Isto acarreta uma aproximação, por tanto há existência de erro, assunto que veremos na próxima aula.

1.6 Atividades

1. Seja o número N = 56783945783245 e um computador com t=8, qual é a representação em ponto flutuante, precisão simples, e em precisão dupla?

2. Verifique se as duas expressões a seguir podem ser usadas para calcular a abscissa da interseção da reta,que passa pelos pontos (x0,y0) e (x1,y1) , com o eixo x. x=(x0y1 – x1y0)/(y1-y0) e x=x0- [(x1-x0)y0]/(y1-y0)

3. Usar os pontos (1.31, 3.24) e (1.93,4.76) e t=3 dígitos, calcule o x usando as fórmulas do exercício 2. Comente.

4. Cada computador tem o “t” número de dígitos que trabalha, o algoritmo que segue calcula este número (resultado em j)

   P1. e=1
   P2. j=1
   P3. Enquanto 1+e > 1
   j=j+1
   e=e/2
   Fim enquanto
   P4. Mostrar j

   A implementação na linguagem do Scilab

```
e=1;
j=1;
while 1+e > 1
    j=j+1;
    e=e/2;
end
j
```

1.7 Comentário das atividades

Os exercícios 1 a 3 é para fixar as definições de ponto flutuante.
O exercício 4 é interessante para descobrir o número t e também um ótimo exercício para iniciar na programação no software SciLab.

1.8 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

Erros

META

Conceituar o erro, as fontes e formas de expressar estes erros, propagação dos erros em operações aritméticas fórmula geral e problema inverso.

OBJETIVOS

Resolver problemas práticos de erros em funções de n variáveis e calcular a cota para o erro em processos infinitos.

2.1 Erros

Na aula anterior vimos que nem sempre a aritmética computacional coincide com a aritmética real.

Por exemplo, o número π, número irracional com infinitos dígitos, não é possível ser armazenado na memória do computador por ela ter tamanho finito e fixo. Ao armazenar este na forma standard, ocorre uma aproximação do valor exato. Logo existe um erro. Neste caso, de arredondamento.

2.2 Tipos de Erros

Pela fonte onde são produzidos estes erros podemos classificá-los como:

- Erros de modelação
- Erros inerentes aos dados de entrada
- Erros de arredondamento
- Erros de truncamento

Os erros de *modelação* são provenientes da simplificação das situações reais que se faz através do modelo, ignorando-se certos aspectos do mundo real.

Os erros *inerentes* são os erros cometidos nos valores dos dados, causados pela inexatidão das medidas tais como distância, tempo e temperatura, e que são medidos por instrumentos limitados, por enganos pessoais ou pela natureza.

Os erros de *arredondamento* são o resultado da representação de um número numa máquina.

Os erros de *truncamento* são erros cometidos pela aproximação de um cálculo infinito por outro finito.

Definição 4. - O erro absoluto é definido como a diferença do valor exato e valor aproximado.

$$\varepsilon = Ve - Va$$

onde:

ε é o erro absoluto
Ve é o valor exato
Va é o valor aproximado

O módulo do erro absoluto (erro absoluto máximo) é o valor absoluto de:

$$|\, \varepsilon \,| = |\, Ve - Va \,|$$

O erro relativo é representado como o erro absoluto dividido pelo valor exato

$$\delta = \varepsilon / Ve \qquad \approx \qquad \varepsilon / Va$$

Obs. Usa-se o valor aproximado Va se não se conhece o valor exato Ve

O erro percentual é representado como:

$$P = 100\delta$$

2.3 Propagação do erro nas operações aritméticas

2.3.1 Erro na soma e diferença

P1. Seja $Va_3 = Va_1 \pm Va_2$ (Hipótese)
P2. Seja $Ve_3 = Ve_1 \pm Ve_2$ (Hipótese)
P3. $\varepsilon_i = Ve_i - Va_i$, i = 1,2,3 (def. de erro absoluto)
P4. $Va_3 + \varepsilon_3 = (Va_1 + \varepsilon_1) \pm (Va_2 + \varepsilon_2)$ (P2 e P3)
P5. $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$ (P4,P1)
P6. $|\varepsilon_3| = |\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2|$ (definição de módulo)
P7. $|\varepsilon_3| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$ (desigualdade triangular)

2.3.2 Erro no produto

P1. Seja $Va_3 = Va_1 . Va_2$ (Hipótese)
P2. Seja $Ve_3 = Ve_1 . Ve_2$ (Hipótese)
P3. $\varepsilon_i = Ve_i - Va_i$, i= 1,2,3 (def. de erro absoluto)
P4. $Va_3 + \varepsilon_3 = (Va_1 + \varepsilon_1) . (Va_2 + \varepsilon_2)$ (P2 e P3)
P5. $Va_3 + \varepsilon_3 = \varepsilon 1 . \varepsilon_2 + \varepsilon_1 . Va_2 + Va_1 . \varepsilon_2 + Va_1 .Va_2$ (P4)
P6. $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 . \varepsilon_2 + Va_2 . \varepsilon_1 + Va_1 . \varepsilon_2$ (P5 e P1)
P7. $\varepsilon_3 / Va_3 = (Va_2 . \varepsilon_1 + Va_1 . \varepsilon_2 + \varepsilon_1 . \varepsilon_2) / Va_3$ (def. de erro relativo)
P8. $\delta_3 = \delta_1 . \delta_2 + \delta_1 + \delta_2$ (def. de erro relativo)
P9. $|\delta_3| = |\delta_1 . \delta_2 + \delta_1 + \delta_2|$ (def de módulo)
P10. $|\delta_3| \leq |\delta_1| . |\delta_2| + |\delta_1| + |\delta_2|$ (desigualdade triangular)

2.3.3 Erro na divisão

P1.Seja $Va_3 = Va_1 / Va_2$ (Hipótese)
P2.Seja $Ve_3 = Ve_1 / Ve_2$ (Hipótese)
P3.$\varepsilon_i = Ve_i - Va_i$, i = 1,2,3 (def. de erro absoluto)
P4.$Va_3 + \varepsilon_3 = (Va_1 + \varepsilon_1) / (Va_2 + \varepsilon_2)$ (P2 e P3)
P5.$Va_3 + \varepsilon_3 = (Va1 + \varepsilon_1) . (1 / Va_2) . (1 + \varepsilon_2 / Va_2)^{-1}$ (P4)
P6.$Va_3 + \varepsilon_3 = (Va_1 / Va_2 + \varepsilon_1 / Va_2) . (1 - / ...)$ (P5)
P7. $\varepsilon 3 = (Va2 . \varepsilon 1 - Va1 . \varepsilon 2) / (Va2)^2$ (P6)
P8. $\varepsilon 3 / Va3 = (1 / Va3) . (Va2 . \varepsilon 1 - Va1 . \varepsilon 2) / (Va2)^2$ (P7)
P9. $\delta 3 = \delta 1 - \delta 2$ (P8 def. erro relativo)
P10.$|\delta 3 | = |\delta 1 - \delta 2|$ (P9 Módulo)
P11.$|\delta 3| \leq |\delta 1| + |\delta 2|$ (P10 desig. triangular)

Exemplo 1:

Sejam os números irracionais $\pi = 3.14159265358979311599 80 \ldots$ e $\sqrt{2} = 1.4142135623730951454746 \ldots$ (valores dados pelo SciLab , %pi e sqrt(2) com format(25)), que devem ser armazenados em uma máquina de t=8 dígitos na mantissa. Qual é o erro absoluto para $\pi + \sqrt{2}$ e para $\pi * \sqrt{2}$?

Os valores de $\pi = 0.31415927 * 10^1$ e $\sqrt{2} = 0.14142136$, estão na forma standard normalizada.

Observe que as mantissas foram arredondadas. Pela definição de erro absoluto:

$$\varepsilon_\pi = 3.14159265358979311599 80 \ldots - 3.1415927 = -0.0000000464102067887495 \ldots$$
$$\varepsilon_{\sqrt{2}} = 1.4142135623730951451746 \ldots - 1.4142136 = -0.0000000376269049251476 \ldots$$

$$\varepsilon_{(\pi+\sqrt{2})} = \varepsilon_\pi + \varepsilon_{\sqrt{2}} = -0.0000000464102067887495 \ldots - 0.0000000376269049251476 \ldots$$
$$= -0.0000000087833018636019 \ldots$$

$$\varepsilon_{(\pi*\sqrt{2})} = \pi * \varepsilon_{\sqrt{2}} + \sqrt{2} * \varepsilon_\pi + \varepsilon_\pi * \varepsilon_{\sqrt{2}}$$
$$= 3.1415927 * (-0.0000000376269049251476) + 1.4142136$$
$$* (-0.0000000464102067887495) + (-0.0000000376269049251476)$$
$$* (-0.0000000464102067887495) = 0.0000927299886941268531$$

Exemplo 2:

Qual o erro máximo para um número x com t dígitos na mantissa, se ele é arredondado?

O dígito t é acrescentado uma unidade se o dígito t+1 ≥ 5 , em outro caso não se modifica. Então os valores do dígito t e dígito t+1 poderão ser t 0,t 1,t 2,t 3 ou t 4 ou (t-1)5, (t+1)6, (t+1)7, (t+1)8 ou (t+1)9, fazendo parte do valor exato, e os respectivos erros $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon 5,\varepsilon_6,\varepsilon_7,\varepsilon 8,\varepsilon_9$ serão menores que 0.5×10^{-t}.

2.4 Fórmula geral para Erros

Seja uma função diferenciável y = f(x).

Uma variação de x em um (x) faz que mediante a função f haja uma variação de y, assim:

$$\Delta(y) = f [x + (x)] - f(x),$$

considerando $\Delta(x)$ um valor muito pequeno, ou seja, uma quantidade que represente um erro em x. Utilizando f teremos uma variação de y, chamada de $\Delta(y)$, e que representará o erro em y ou da função f.

Se em $\Delta(y) = f [x + \Delta(x)] - f(x)$ multiplicando e dividindo o segundo membro por $\Delta(x)$ temos:

$$\Delta(y) = \{ f [x + \Delta(x)] - f(x) \} \Delta(x) / \Delta(x)$$
$$\Delta(y) = \{ f [x + \Delta(x)] / \Delta(x) - f(x) / \Delta(x) \} \Delta(x)$$

$$\Delta(y) \approx f'(x)\,\Delta x, \text{ considerando } \Delta x \text{ muito pequeno}$$
$$|\varepsilon_y| \approx |f'(x)|\,|\varepsilon_x|$$

Em geral seja:

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

seja:

$$\varepsilon_{xi}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

os erros absolutos dos argumentos de f, então o erro absoluto de u é:

$$\varepsilon_u \approx (\partial f / \partial x_1)\,\varepsilon_{x1} + (\partial f / \partial x_2)\,\varepsilon_{x2} + \ldots + (\partial f / \partial xn)\,\varepsilon_{xn}$$
$$|\varepsilon_u| = |(\partial f / \partial x_1)\,\varepsilon_{x1} + (\partial f / \partial x_2)\,\varepsilon_{x2} + \ldots + (\partial f / \partial x_n)\,\varepsilon_{xn}|$$
$$|\varepsilon_u| \leq |(\partial f / \partial x_1)|\,|\varepsilon x_1| + |(\partial f / \partial x_2)|\,|\varepsilon_{x2}| + \ldots + |(\partial f / \partial x_n)|\,|\varepsilon_{xn}|$$

$$\partial_u \leq |(\partial f / \partial x_1/u)\,\varepsilon_{x1}| + |(\partial f / \partial x_2/u)\,\varepsilon_{x2}| + \ldots + |(\partial f / \partial x_n/u)\,\varepsilon_{xn}|$$

Exemplo:

Achar o máximo erro absoluto e relativo do volume de uma esfera se o diâmetro D = (3,7 ± 0,05) cm, Π = 3,14.

$V = 1/6\ \Pi\ D^3 = V(\Pi,D)$ (função em duas variáveis)

Observe que é considerada uma variável porque tem erro.

$\varepsilon_D \leq 0{,}05$ $\qquad$ $\varepsilon_\Pi \leq 0{,}0016$

$\partial V / \partial \Pi = 1/6\ D^3 = 1/6\ (3{,}7)^3 = 8{,}4421666$
$\partial V / \partial D = 1/2\ \Pi\ D^2 = (1/2)\ 3{,}14\ (3{,}7)^2 = 21{,}4933$

$\varepsilon_V = (\partial V / \partial \Pi)\varepsilon_\Pi + (\partial V / \partial D)\varepsilon_D =$
$\leq 8{,}4421666\ (0{,}0016) + 21{,}4933\ (0{,}05) =$
$\leq 0{,}01350746656 + 1{,}074665 = 1{,}08817246656\ cm^3$

$\delta_V \leq 1{,}08817246656 / 26{,}508403 = \underline{0{,}041050}$ ou
$\delta_V \leq (1/6\ D^3\ \varepsilon_\Pi + 1/2\ \Pi\ D^2\ \varepsilon_D)/(1/6\ \Pi\ D^3)$
$\delta_V \leq \delta_\Pi + 3\ \delta_D$
$\delta_V \leq (0{,}0016/3{,}14) + 3(0{,}05/3{,}7) = 0{,}0005095 + 0{,}0405405 = \underline{0{,}04105}$

2.5 Problema inverso do Cálculo de Erros

O problema inverso do cálculo de erros consiste em encontrar os erros dos argumentos de uma função dado o erro da função.

Seja a função:

$$u = f(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n)$$

dado o erro em u determinar os erros para $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$.

Este problema não tem solução analítica exata, já que temos n incógnitas para uma única equação.

Para poder dar uma solução a este problema há que se considerar restrições a fim de reduzir o problema a uma equação e uma incógnita.

Uma alternativa para esta redução é considerar “O princípio de Efeitos iguais”, hipótese que usa-se em estatística. Este princípio supõe que as leis físicas atuam da mesma maneira para uma ação produzindo efeitos iguais.

Extrapolando esta idéia para o problema inverso do cálculo de erros surgem as seguintes hipóteses:

I . Os erros absolutos são iguais para $x_1, x_2, ..., x_n$.
II. Os erros relativos são iguais para $x_1, x_2, ..., x_n$.
III. A função u contribui no erro total.

2.5.1 Hipótese I

P1. $\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2} = \varepsilon_{x3} = ... = _{xn} = k_1$ (Hipótese)
P2. ε_u é conhecido (Hipótese)
P3. $\varepsilon_u = \sum(\partial f / \partial xi)\ \varepsilon_{xi}$, i = 1, 2, ..., n (def. de ε)
P4. $\varepsilon_u = k_1 \sum(\partial f / \partial xi)$ (P3, P1)
P5. $k_1 = \varepsilon_u / \sum(\partial f / \partial xi)$ (P4)

2.5.2 Hipótese II

P1. $\delta_{x1} = \delta_{x2} = ... = \delta_{xn} = k_2$ (Hipótese)
P2. ε_u é conhecido (Hipótese)
P3. $\varepsilon_u = \sum(\partial f / \partial xi)\ \varepsilon_{xi}$, i = 1, 2, ..., n (def. de ε)
P4. $\varepsilon_u = \sum(\partial f / \partial xi)\ \varepsilon_{xi}\ xi / xi$, i = 1, 2, ..., n (P3)
P5. $\varepsilon_u = \sum(\partial f / \partial xi)\ xi\ \delta_{xi}$, i = 1, 2, ..., n (P4)
P6. $\varepsilon_u = k2 \sum(\partial f / \partial xi)\ xi$, i = 1, 2, ..., n (P5, P1)
P7. $k_2 = \varepsilon_u / \sum(\partial f / \partial xi)\ xi$, i = 1, 2, ..., n (P6)

2.5.3 Hipótese III

P1. $(\partial f / \partial x1)\ x1 = (\partial f / \partial x2)\ x2 = ... = (\partial f / \partial xn)\ xn = k3$ (Hipótese)
P2. ε_u é conhecido (Hipótese)
P3. $\varepsilon_u = \sum(\partial f / \partial xi)\ \varepsilon_{xi}$, i = 1, 2, ..., n (def. de ε)
P4. $\varepsilon_u = n\ k_3$ (P3, P1)
P5. $k_3 = \varepsilon_u / n$ (P4)

2.6 Erros de Truncamento

Erro cometido ao aproximar um cálculo infinito por outro finito.

Exemplo 1:

$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$
$x_1 = F(x_0)$
$x_2 = F(x_1)$
:
:
$x_{n+1} = F(x_n)$
$x_n \rightarrow x^*$

Seja $\bar{x}$ uma solução aproximada da seqüência { x_n } que converge a x* no limite.

x → valor aproximado
x* → valor exato

$x^* = \lim_{n\rightarrow\infty} x_n$
$x_0, x_1, x_2, \ldots, \bar{x}, \ldots \rightarrow x^*$
$\varepsilon = V_e - V_a = x^* - \bar{x}$

onde ε é o erro de truncamento.

Exemplo 2
Seja uma função f(x), n vezes contínua e diferenciável, num intervalo [a,b].

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{i}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Série de Taylor
se a = 0, Série de Mac-Laurin

Cálculo da função sen x, isto é, expressar como uma série de potências

Solução:

f(x) = sen x	f'''(x) = -cos x
f'(x) = cos x	f''''(x) = sen x
f'(x) = -sen x	f'''''(x) = cos x

função trigonométrica cíclica

Para a = 0:

f(0) = 0	f'''(x) = -1
f'(0) = 1	f''''(x) = 0
f''(0) = 0	f'''''(x) = 1

$$sen\,x = \frac{0}{0!}(x-0)^0 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \cdots$$

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$sen\ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i, \quad \text{x} \rightarrow \text{radianos}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i = V_e$$

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i, = V_e$$

$$\varepsilon = V_e - V_a = \sum_{i=k+1}^{k} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(-1)^i$$

Estima o erro → Encontrar uma cota superior para o erro.

Teorema: "Seja a série $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i$, tal que $|u_0| > |u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots > |u_n| > |u_{n+1}| > \ldots$ alternada e convergente, então $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i < |u_{k+1}|$

Para a série sem x : u = $\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$, 0 ≤ x ≤ Π/4

$$\left|\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right| > \left|\frac{x^{2i+3}}{2i+3!}\right| = \left|\frac{x^{2i+1}x^2}{(2i+1)!\,(2i+2)(2i+3)}\right|$$

$$\left|\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right| \cdot \left|\frac{x^2}{(2i+2)(2i+3)}\right| < \left|\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right|$$

Para a função sem x:

$$\varepsilon_T < \left|\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\right|$$

Exemplo:

Determinar o erro de truncamento para o cálculo de sen 30º pela fórmula de Taylor.

Solução:

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \ldots$$

$$sen\ 30° = sen\ \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{(\pi/6)^3}{6} + \frac{(\pi/6)^3(\pi/6)^2}{6.20}$$

$$\varepsilon_T < \frac{x^7}{7!} = \frac{(\pi/6)^{37}}{7!\,6}$$

$$S_0 = x$$

$$S_1 = \frac{x.x^2}{3.2} = S_0.\frac{x^2}{3.2}(-1)$$

$$S_2 = \frac{x^3}{3.2}.\frac{x^2}{4.5} = S_1.\frac{x^2}{4.5}(-1)$$
$$S_3 = \frac{x^5}{5!}.\frac{x^2}{6.7} = S_2.\frac{x^2}{6.7}(-1)$$

$$S_{j+1} = S_j\frac{x^2}{(2j)(2j+1)}(-1)$$

Cálculo do *e* :

f(x) = e^x
Fazer x = 1→ f(1) = *e*
f'(x) = e^x, f''(x) = e^x...
$$e = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1!}$$
f(0) = e^0 = 1
f'(0) = e^0 = 1

Para x = 1 → $e = 1 + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}1666$

$$e = 2{,}6666$$

$$\varepsilon_T = V_e - V_a = \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} + \frac{x^{k+3}}{(k+3)!} + \cdots$$
$$= \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left[1 + \frac{x}{k+2} + \frac{x^2}{(k+2)(k+3)} + \frac{x^3}{(k+2)(k+3)(k+4)} + \cdots\right]$$
$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} < \frac{1}{(k+2)(k+2)}$$
$$\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)} < \frac{1}{(k+2)(k+2)(k+2)}$$
$$< \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left[1 + \frac{x}{k+2} + \frac{x^2}{(k+2)^2} + \frac{x^3}{(k+2)^3} + \cdots\right]$$
$$< \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{k+2}\right)^i \left\|\sum_{i=0}^{\infty}a^i = \frac{1}{1-a}, se\ |a| < 1\right.$$

Se $a = \frac{x}{k+2}$<1
$x < k$+2

Se k=0, x<2

$$\varepsilon_T < \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{k+2}}$$

Se x = 1,

$$\varepsilon_T < \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k+2}{k+2-1} = \frac{k+2}{(k+1)!\,(k+1)}$$

$$\varepsilon_T < \frac{3+2}{4!\,4} = \frac{5}{24.4} = \frac{5}{96}$$

Exemplo:

Quantos termos da série de Taylor são necessários para que o número *“e”* tenha um erro menor que 0,01.

Solução:

ε_T < 0,01

$$\varepsilon_T < \frac{k+2}{(k+1)!\,(k+1)} < 0{,}01$$

para k = 2: $\frac{4}{3!3} = \frac{4}{18}$

para k = 3: $\frac{5}{4!4} = \frac{4}{96}$

para k = 4: $\frac{6}{5!5} = \frac{4}{100}$

O número de termos é 6.

2.7 Atividades

1. Se 1000 aproxima x com erro menor que ε. Mostre que 1/1000 aproxima 1/x com erro absoluto menor que $|\varepsilon| / |(1000 + \varepsilon)^2|$

2. A altura H e raio R da base de um cilindro são medidos com aproximação de 0.5%. Qual é o máximo erro absoluto e relativo ao calcular o volume. π = 3.14

3. Um cilindro de alumínio com diâmetro da base d = 2cm ± 0.01cm altura h = 11cm ± 0.02cm e peso p = 93.4gf ± 0.001 gf. Determinar o erro relativo do peso específico pe = p/v

4. Determine a série de Taylor para a função f(x) = sen x , e a cota do erro de truncamento. Quantos termos da série são necessários para cometer um erro menor que 0.01. x = 0.8

5. Um cilindro de alumínio com diâmetro da base d = 2cm ± 0.01cm altura h = 11cm ± 0.02cm e peso p = 93.4gf ± 0.001 gf. Determinar o erro relativo do peso específico pe = p/v .

2.8 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515

Zeros de Funções

META

Resolver o problema: dada a função f(x), contínua em um intervalo I=[a,b], encontrar um x* tal que f(x*)=0.

OBJETIVOS

Estudar diferentes algoritmos, encontrar soluções e verificar qual é o mais eficiente e em que condições.

3.1 Zeros de Funções

Um problema comum em engenharia, ou em geral nas diversas áreas das ciências exatas, é determinar soluções em equações não lineares. Equações estas que envolvem funções transcendentes.

No problema seguinte:

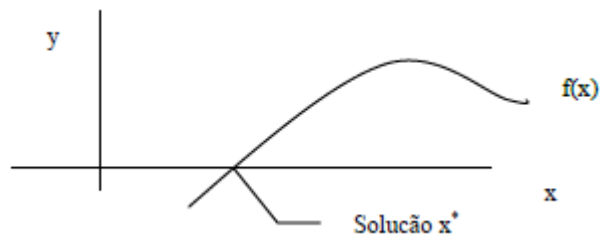
Um cabo telefônico suspenso entre dois postes tem um peso de φ quilogramas–força por metro. A tensão T no meio do cabo é obtida pela resolução da equação (2T/φ) senh(φL/2T) = S, onde S é o cumprimento do fio, L é a distância entre os postes e φ o peso específico do fio por metro linear.

Os métodos numéricos, expostos nesta aula, são utilizados para encontrar soluções aproximadas para equações deste tipo de problema.

Seja a função f(x) = 0.

Um zero da função é um x* Є $\mathcal{R}$ tal que f(x*) = 0.

Para um intervalo I = [a,b], se f(a).f(b) < 0 c / f(c) = 0.

f deve ser contínua em I = [a,b].

3.2 Método da Bisseção

O método é baseado no teorema do valor intermediário que diz:

“Se uma função é contínua no intervalo I=[a,b] e satisfaz a condição f(a)*f(b)<0, então existe pelo menos um x*Є[a,b] tal que f(x*)=0.”

O método também denomina-se de pesquisa binária, e consiste em dividir o intervalo inicial em subintervalos que contenha o zero procurado. Divide-se o intervalo inicial e se descarta o intervalo onde a função não troca de sinal, prosseguindo com o intervalo que satisfaz a condição de troca de sinal.

3.3 Algoritmo

P1. Dada a função contínua f(x) no intervalo I=[a,b], definir uma tolerância ε e verificar se f(a)*f(b) < 0.
P2. c=(a+b)/2
P3. Se |f(c)| < ε então pare. Solução aproximada c.

P4. Se f(a)*f(c) < ε então
b=c
se não
a=c
P5. Volta ao P2.

Exemplo

Encontrar uma solução para a equação $f(x)=2^x-4*x$, no intervalo [0,1] usando o programa a seguir.

3.4 Programa no Scilab

```
function y=f(x)
        y=2^x-4*x
endfunction
format(15)
a=0;
b=1;
[e]=input("Digite a tolerancia Ex.0.0001: ");
c=(a+b)/2;
fc=abs(f(c));
while fc > e
        if f(a)*f(c) < 0 then
                b=c;
        else
                a=c;
        end
        c=(a+b)/2
        fc=abs(f(c));
end
c
```

3.5 Métodos Iterativos para a Solução do Problema

Um método iterativo é um método repetitivo, que gera normalmente uma seqüência de valores.

Para que a seqüência de valores seja gerada deve existir uma fórmula recursiva.

Se a seqüência gerada nos leva à solução, então é uma seqüência convergente.

O método iterativo possui uma fórmula recursiva, uma regra de parada e condições de convergência para a seqüência gerada.

A regra de parada é dada pelo valor de ε, chamado também de zero numérico. É um valor pequeno, nomeado de tolerância, que indica o grau de exatidão da solução. É definido por fora.

3.6 Método de Iteração Simples ou iteração linear

Um número p é um ponto fixo se, para uma função dada g(x), g(p)=p
Exemplo:

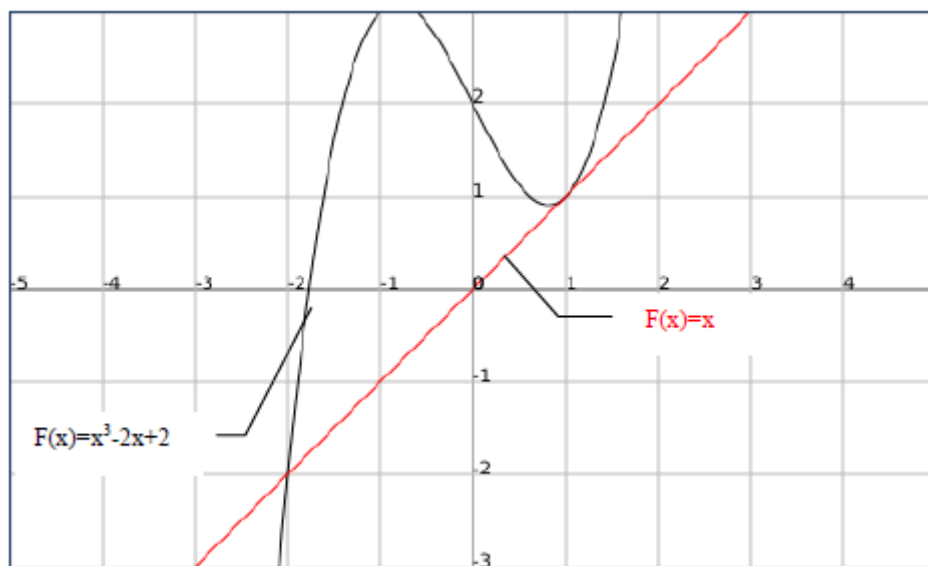
$g(x)= x^3 – 2x + 2$

os pontos - 2 e 1 são pontos fixos porque

$g(-2) = - 2$ e $g(1) = 1$
$g(-2) - (-2) = 0$ e $g(1) – 1 = 0$

Dado um problema f(x)=0 , pode-se definir uma função g(x) de tal forma que

$g(x)=x-f(x)$ e $f(x)=x – g(x)$

Se g(p)=p então g(p) – p = 0 e f(p)=0 e p será um zero.

3.7 Algoritmo

P0. Transformar a função f(x) = 0, tal que g(x) –x = f(x) =0
P1. Para j=0
Escolher um valor inicial qualquer x_j em [a,b]
P2. $j \leftarrow j + 1$
$x_j \leftarrow g(x_{j-1})$
P3. (Regra de Parada)
Se $|x_j – x_{j-1}| < \varepsilon$ então x_j é solução aproximada.
Se não Voltar a P2

A seqüência gerada é $x_0,x_1,x_2,..............,x_n,x_{n+1},..........$

Onde $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, $x_3=g(x_2)$..........$x_n=g(x_{n-1})$

Exemplo:

$f(x) = x^3 - 2x - 1$ $\quad I = [1,2]$
$f(1) = 1 - 2 - 1 = -2$
$f(2) = 8 - 4 -1 = 3$
$f(1).f(2) < 0$ $\quad \varepsilon = 0,01$

P0: $g(x) / g(x) - x = f(x)$
$x^3 - 2x - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2x+1}$

$g(x) - x = f(x)$
$g(x) - x = \sqrt[3]{2x+1}$

P1: $j \leftarrow 0$, $x_0 \in I = [1,2]$
$x_0 = 1$

P2: $x_1 = g(x_0) = g(1) = \sqrt[3]{3}$
$x_1 = 1,44334957$

P3: $|x_1 - x_0| = |1,44224957 - 1| > 0,01$

P2: $x_2 = g(x_1) = g(1,44224957) = \sqrt[3]{(1,44224957).2+1}$
$x_2 = \sqrt[3]{3,8845} = 1,571973$

P3: $|x_2 - x_1| = |1,571973 - 1,442251| > 0,01$

P2: $x_3 = g(x_2) = g(1,571973) = \sqrt[3]{2(1,571973)+1}$
$x_3 = 1,0622$

P3: $|x_3 - x_2| = |1,60622 – 1,571973| = 0,034 > 0,01$

P2: $x_4 = g(x_3) = F(1,60622) = \sqrt[3]{2(1,60622)+1}$
$x_4 = 1,6150$

P3: $|1,6150 – 1,6002| = 0,0088 < 0,01$

$x_4 = 1,615$ Solução aproximada

3.8 Condições de Convergência

I) $\forall x \in I \leftrightarrow g(x) \in I$;
II) F(x) deve ser contínua no intervalo I;
III) O valor absoluto da derivada da função

|g'(x)| < 1 ∀ x ЄI.

A seqüência { x_n } gerada pelo algoritmo de iteração simples convergirá à solução x*, isto é, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ ou { x_n } →x*.

Exemplo:

Verificar as condições de convergência para g(x) = $\sqrt[3]{2x+1}$.

1) ∀ x Є [1,2], então g(x) Є [1,2]
   Para x = 1: g(1) = 1,4422 Є [1,2]
   Para x = 2: g(2) = 1,71 Є [1,2]
   Porque a função é crescente no intervalo então g(x) Є [1,2]

2) $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$
   Não há pontos de descontinuidade no intervalo

3) g(x) = $(2x+1)^{1/3}$

$$g'(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{-2}{3}}(2x+1)' = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{-2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

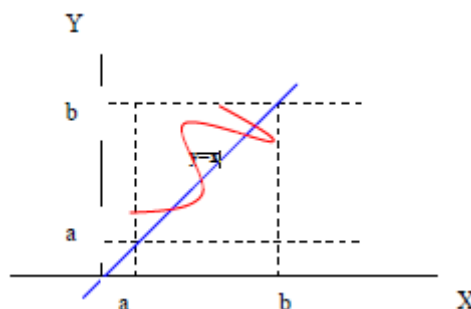
x = 1: $g'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{9}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2{,}08}\right)$ < 1

x = 2: $g'(2) = \frac{2}{3\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2{,}924}\right)$ < 1

Porque a função derivada g'(x) é decrescente no intervalo

Observação: O intervalo poderá ser relaxado para satisfazer as condições

3.9 Considerações das condições de Convergência

I) **∀ x Є I ↔ g(x) Є I = [a,b]**
   f(x) = 0 → g(x) – x = f(x)

II) g(x) é contínua
   Condição I) e II) garantem a existência de solução

1) a ≤ g(a)	(1a condição)
2) b ≥ g(b)	(1a condição)
3) 0 ≤ g(a) - a = f(a)	(1, def. de g(x))
4) 0 ≥ g(b) - b = f(b)	(2, def. de g(x))

5) $f(a) \geq 0 \wedge f(b) \leq 0$ (3, 4)
6) $\exists\ c \in [a,b] / f(c) = 0$ (5, def. de zero de função)

III) $| g'(x) | \forall < 1, x \in I$

Também conhecida como condição de Lipchitz

$$| g'(x) | \leq L , L < 1 , \forall x \in I$$

é equivalente a dizer que para dois pontos q.q. I vale o seguinte:

$$x_k, x_{k+1} \in I \text{ então } |g(x_k) - g(x_{k+1})| \leq L |x_k - x_{k+1}|$$

$\rightarrow$

1) $|g'(x)| \leq L , L < 1 , \forall x \in I = [a,b]$ (Hipótese)
2) Seja x_k e x_{k+1} pontos pertencentes ao intervalo I (def. $x \in I$)
3) Existem $g(x_k)$ e $g(x_{k+1}) \in I$ (def. g(x))
4) Pelo Teorema do Valor Intermediário:

$$\exists\ c\ [x_k, x_{k+1}] / g'(c) = \frac{g(x_k) - g(x_{k+1})}{x_k - x_{x+1}}$$

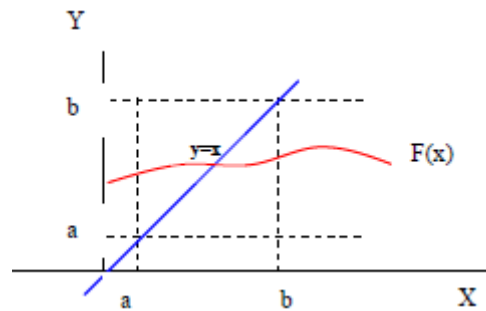
5) $|g'(c)| = \left|\frac{g(x_k) - g(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}\right|$ (4,def. de valor absoluto)
6) Como $c \in I$, então $g'(c) \leq L$ (5, 1)
7) $\left|\frac{g(x_k) - g(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}\right| \leq L$ ou $|g(x_k) - g(x_{k+1})| \leq L|x_k - x_{k+1}|$

As Condições III) e II) garante a unicidade da solução.

1) $g'(x) \leq L , L < 1 , \forall x \in I$
$\leftrightarrow |g'(x_k) - g'(x_{k+1})| \leq L.| x_k - x_{k+1} |$ para q.q. $x_k, x_{k+1} \in I$ (Hipótese)

2) Suponhamos que existem duas soluções s_1, s_2, diferentes.
3) $s_1 = g(s_1) \wedge s_2 = g(s_2)$ (def. de Solução)
4) $s_1, s_2 \in I$, então $|g(s_1) - g(s_2)| \leq L |s_1 - s_2|$(def. eq. à cond. de Lipchitz)
5) $|s_1 - s_2| \leq L |s_1 - s_2|$ (3, 4)
6) Como s_1 é diferente de $s_2 \rightarrow s_1 - s_2 \neq 0$, logo $1 \leq L$ | contradição com a hipótese, constante de Lipchitz menor que 1
7) $\rightarrow s_1 = s_2$

3.10 Interpretação geométrica a condição III

$| g'(x) | < 1$
$| \text{tg } \theta | = g'(x) < 1$
$| \text{tg } 45^o | = 1$

As três condições garantem convergência da seqüência gerada pelo algoritmo

Provar que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| = 0$$

1) $|x_n - x^*|$
2) $|x_n - x^*| = |g(x_{n-1}) - g(x^*)|$ (def. algoritmo e x* solução)
3) $|g(x_{n-1}) - g(x^*)| \leq L.|x_{n-1} - x^*|$ (condição 3 equiv.)
4) $|x_{n-1} - x^*| = |g(x_{n-2}) - g(x^*)|$
5) $|x_n - x^*| \leq L.|x_{n-1} - x^*| \leq L.L.|x_{n-2} - x^*|$ (2, 4)
$|x_n - x^*| \leq L^2.|x_{n-2} - x^*|$
6) $|x_{n-2} - x^*| = |g(x_{n-3}) - g(x^*)| \leq L.|x_{n-3} - x^*|$
7) $|x_n - x^*| \leq L^3.|x_{n-3} - x^*|$
8) $|x_n - x^*| \leq L^n.|x_0 - x^*|$
9) $\lim_{n\to\infty} |x_n - x^* \leq |\lim_n L^n.|x_0 - x^*|$
10) $\lim_{n\to\infty} L^n.| x_0 - x^* | = |x_0 - x^*| . \lim_{n\to\infty} L^n$
11) $\lim_{n\to\infty} L^n = 0$ porque $L < 1$
12) $\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| = 0$

3.11 Erro de truncamento para n passos

Valor exato: x^*
Valor aproximado: x_n, n qualquer.

$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$

$\varepsilon = Ve - Va = x^* - x_n$

1) $|x^* - x_n| = \lim_{m\to\infty} | x_m - x_n |$, $m > n$
2) $|x_m - x_n| = |x_n - x_m| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+2} - \ldots - x_{m-1} - x_m|$
3) $|x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+3}| + \ldots + |x_{m-1} - x_m|$
4) $|x_n - x_{n+1}| = |g(x_{n-1}) - g(x_n)| \leq L\ |x_{n-1} - x_n|$
5) $|x_{n+1} - x_{n+2}| = |g(x_n) - g(x_{n+1})| \leq L\ |x_n - x_{n+1}| \leq L^2\ |x_{n-1} - x_n|$
6) $|x_{n+2} - x_{n+3}| = |g(x_{n+1}) - g(x_{n+2})| \leq L\ | x_{n+1} - x_{n+2} | \leq L^3\ |x_{n-1} - x_n|$
7) $|x_n - x_m| \leq | x_{n-1} - x_n|\ [\ L + L^2 + L^3 + L^4 + \ldots + L^{m-n}\ ]$

8) $\lim_{m\to\infty} |x_n - x_m| \leq \lim_{m\to\infty} |x_{n-1} - x_m| \sum_{i=1}^{m-n} L^i$
9) $|x_n - x^*| \leq |x^{n-1} - x^n| \sum_{i=1}^{\infty} L^i$
10) $|x_n - x^*| \leq |x^{n-1} - x^n| L\sum_{i=1}^{\infty} L^i = |x_{n-1} - x_n| L \frac{1}{1-L}$
11) $|x_n - x^*| \leq L \frac{|x_{n-1} - x_n|}{1-L}$ Cota do erro

3.12 Atividades

1. Encontre uma aproximação para $25^{1/3}$ com precisão de 10^{-4} usando o algoritmo da bissecção

2. Achar uma função de iteração para encontrar um zero diferente de $x = 4$ de $2^x = 4x$

3. Dar uma cota do erro de truncamento ao usar n iterações no método de iteração simples. A cota deve estar en função dos valores $|x_o - x_1|$ e a constante de Lipchitz L

4. Demonstre que $x_{n+1} = x_n (2 - K x_n)$ converge a 1/K quando n tende ao infinito

3.13 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515

Zeros de Funções
(continuação)

META

Resolver o problema: dada a função f(x), contínua em um intervalo I=[a,b], encontrar um x* tal que f(x*)=0. Usando o Método de Newton.

OBJETIVOS

Estudar diferentes casos do especiais do Método de Newton.

lino@ufs.br

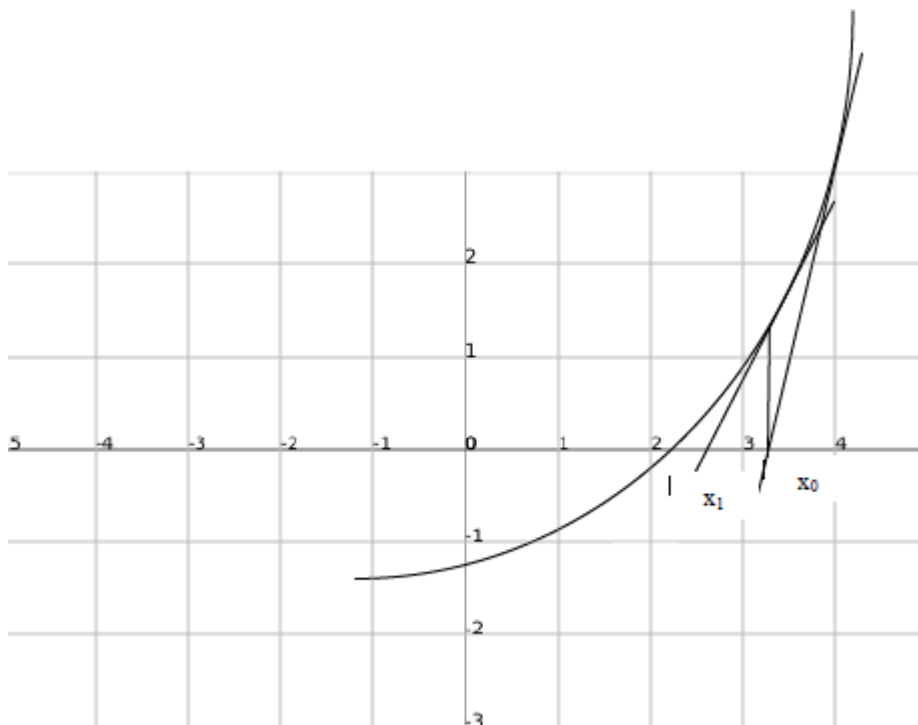
4.1 O Método de Newton

O método de Newton pode ser visto com um caso particular do método de iteração linear, onde a função g(x) é construída para ser uma função de iteração. Isto é, que satisfaça as três condições de convergência.

Seja a função f(x) uma função contínua em I = [a,b], e f(a).f(b) < 0, com f'(x) ≠ 0 no intervalo I.

Construção da função g(x) de tal forma que x – g(x) = f(x)

1) f(x) = 0
2) $\frac{f(x)}{f'(x)} = 0$ por ser f'(x) ≠ 0
4) x – x + $\frac{f(x)}{f'(x)}$ = 0
5) x = x - $\frac{f(x)}{f'(x)}$ = g(x) , onde g(x) é igual ao segundo termo
6) g(x) satisfaz as condições de convergência do método de iteração linear.

4.2 Interpretação geométrica

$$\text{tg}\,\theta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - x_1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Exemplos:
1º) Raiz quadrada de um N>0

Seja $f(x) = x^2 - N$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - N}{2x_n} = \frac{1}{2}\left[\frac{x_n^2 + N}{x_n}\right]$$

Exemplo:
$\sqrt{2} = ?$
$x_0 = 1$

$$x_1 = F(x_0) = \frac{1}{2}\left[x_0 + \frac{N}{x_0}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{1}\right] = \frac{3}{2}$$
$$x_1 = F(x_1) = \frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{N}{x_1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{17}{6}\right] = 1{,}416666$$
$$x_1 = F(x_2) = \cdots$$

2º) Raiz K-ésima de um N>0

$f(x) = x_k - N$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - N}{k.x^{k-1}} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}}\right]$$

4.3 Algoritmo

P0. Dada a função f(x) contínua em **I**=[a,b], f'(x) ≠ 0 em [a,b], f(a).f(b) < 0, ε (tolerância)
P1. Escolher um x_0 inicial em [a,b], j ← 0
P2. j ← j+1 , $x_j = x_{j-1} - f(x_{j-1})/f'(x_{j-1})$
P3. (Regra de parada) Se $|x_j - x_{j-1}| < \varepsilon$ ou $|f(x_j)| < \varepsilon$, então pare. Solução aproximada x_j
Se não volta ao passo P2.

1.4 Programa no SciLab

```
deff('[y]=g(x)','y=2^x-4*x')
deff('[z]=dg(x)','z=log(2)*2^x-4')
x0=0;
x1=0.5
format(20)
eps=0.00001
```

```
while abs(x0-x1) > eps
x0=x1;
x1=x0-(g(x0)/dg(x0))
end
x1
```

1.5 Casos Especiais

Caso 1.

Não se pode garantir que a função f'(x) seja diferente de zero em todo o intervalo i=[a,b].

Seja $f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in [a,b]$

Considerar $f'(x_0) = M$ constante para todo o cálculo da seqüência.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f'(x0) \neq 0 \ \forall \ n$

$f(x_0) = M \neq 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M}$$

Caso 2.

A derivada da função é complexa.

Aproximamos a derivada pelo quociente do limite.

$$f'(x_n) = \lim_{(x_n - x_{n+1}) \to 0} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

Fórmula também conhecida como método da secante.

Caso 3

Método de Newton aplicado a polinômios

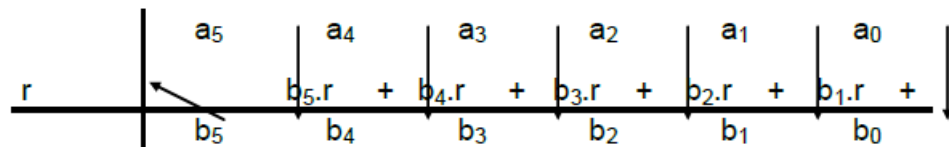
Seja o polinômio $P_n(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_n.x^n$

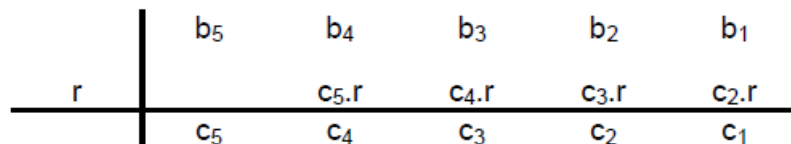
$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P'_n(x_k)}$$

Para cada iteração, é necessário calcular o valor numérico do $P_n(x_k)$ e $P_n'(x_k)$.

Exemplo:
$P_5(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + a_4.x^4 + a_5.x^5$
$P_5(r) = a_0 + a_1.r + a_2.r^2 + a_3.r^3 + a_4.r^4 + a_5.r^5$
Nº de somas = 5
Nº de produtos = 15
Para $P_n(r)$:
Nº de somas = n
Nº de produtos = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = $n\frac{(n-1)}{2}$
$P_5(r) = a_0 + r(a_1 + r(a_2 + r(a_3 + r(a_4 + a_5))))$
Nº de produtos = 5

Esquema de Ruffini-Horner ou Divisão Sintética

$P_n(x)$	$x - r$
R	$Q_{n-1}(x)$

1. $P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x-r)+R$
   para $x = r$:
2. $P_n(r) = Q_{n-1}(r)(r-r)+R$
3. $P_n(r) = R$
4. $P_n'(x) = Q_{n-1}'(x)(x-r)+ Q_{n-1}(x)$
5. $P_n'(r) = Q_{n-1}'(r)(r-r)+ Q_{n-1}(r)$
6. $P_n'(r) = Q_{n-1}(r)$

	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1
r		$c_5.r$	$c_4.r$	$c_3.r$	$c_2.r$
	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1

7. $c_1 = P_n'(r)$

Exemplo:
$P_5(x) = 8 - 2x + 4x^2 - 7x^3 + 5x^4 + x^5$

	1	5	-7	4	-2	8
2		2	14	14	36	68
	1	7	7	18	34	76
2		2	18	50	136	
	1	9	25	68	170	

$P_5(2) = 76$
$P_5'(2) = 170$
Fórmula Recursiva:

$b_n = a_n$
$b_j = b_{j+1} r + a_j$, j = n-1, n-2, n-3, ..., 4, 3, 2, 1, 0
$P(r) = b_0$
$cn= b_n$
$c_j = c_{j+1} r + b_j$, j = n-1, n-2, n-3, ..., 4, 3, 2,1
$P'(r) = c_1$

Localização de zeros

Seja a função f(x) e seja um x suficientemente pequeno.

$-\infty$ 0 $+\infty$

O problema de localização é encontrar um intervalo I = [a,b], tal que f(a).f(b) < 0.

Raízes positivas:
$f(0), f(\Delta x), f(2\Delta x), ..., f(k\Delta x), ...$
Testar se $f(i\Delta x).f((i+1)\Delta x) < 0 \rightarrow i = [i\Delta x, (i+1)\Delta x]$.

Pode-se saber o número de raízes reais de um polinômio:
Regra de Descartes

Exemplos:
$P_4(x) = 1+ 3x - 5x^2 +4x^3 + 8x^4$
Nº de raízes reais positivas: 1 + 1 = 2
$P_4(x) = 1- 3x - 5x^2 -4x^3 + 8x^4$
Nº de raízes reais negativas: 1 + 1 = 2

4.6 Atividades

1. Verificar que o método de Ruffini Horner tem complexidade linear para encontrar o valor numérico de um Polinômio de grau n

2. A equação x^2 -10cosx = 0 tem duas soluções: ±1,3793646. Utilize o método de Newton para encontrar as soluções aproximadas, com precisão de 10^{-5}, usando valores iniciais x_0 iguais a -100, -50, -25, 25, 50, 100

4.6 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515

Interpolação Polinomial

META

Resolver o problema: dada a função f(x), contínua ou um conjunto de pontos, aproximá-la por um polinômio de grau n.

OBJETIVOS

Estudar os principais algoritmos de construção destes polinômios.

5.1 Introdução

Seja uma função f(x), contínua, uma das idéias mais antigas em cálculo numérico é aproximar esta função por um polinômio.

Um Polinômio é fácil de manipular, encontrar suas derivadas, integrais e suas raízes com relativa facilidade.

O teorema de Weierstrass afirma que *"Toda função contínua pode ser arbitrariamente aproximada por um polinômio."*

Os métodos a serem estudados como uma aproximação para uma função f(x) poderão ser aplicados quando, não conhecemos a função, apenas sabemos os pontos x_0, x_1,x_2,x_3,..............,x_n. Situação muito comum na prática quando se trabalha com dados experimentais.

Se os pontos do parágrafo anterior forem distintos, determina-se um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n, tal que

Seja o conjunto de pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),..., (x_n, y_n)

O problema de interpolação é encontrar um $\bar{x}$ para um $\bar{y} \in [x_0, x_n]$.

5.1 Interpolação Linear

Seja o par de pontos (x_0, y_0)(x_1, y_1), a equação da reta que passa pelos pontos é:

y = $a_0 + a_1x$, tal que $\begin{cases} y_0 = a_0 + a_1x_0 \\ y_1 = a_0 + a_1x_1 \end{cases}$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}} \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_0 \\ y_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}}$$

5.2 Interpolação Quadrática

Para 3 pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) não-colineares.

Seja $P_2(x)$ polinômio de grau 2:

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$
$$y_0 = P_2(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2$$
$$y_1 = P_2(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$$
$$y_2 = P_2(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

5.3 Interpolação para um polinômio de grau n

Para n+1 pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2),... ,(x_n, y_n) não-colineares.
Seja $P_n(x)$ polinômio de grau n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

$$y_0 = P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n$$
$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n$$
.
:
$$Y_n = P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & {x_0}^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & {x_1}^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & {x_n}^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_n \end{bmatrix}$$

O problema de encontrar o polinômio que passe pelos pontos dados equivale a resolver o sistema de n+1 equações com n+1 incógnitas. Estudaremos métodos que resolvem esta situação em forma implícita.

5.4 Método de Lagrange

Este método é construtivo que engenhosamente pensó Lagrange, e que tentaremos reproduzir supondo quatro pontos dados ...
Sejam os pontos . (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

Etapa 1
Seja o polinômio de grau 3 construído da forma seguinte:

$$P_3(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$$

Este polinômio será de grau 3 só se $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ e $L_3(x)$ forem polinômios de grau 3, estes polinômios chamaremos de Polinômios de Lagrange.

Etapa 2
O polinômio deve passar pelos pontos dados, ou seja, $P_3(x_0) = y_0$, $P_3(x_1) = y_1$, $P3(x_2) = y_2$ e $P_3(x_3) = y_3$.
Para isto acontecer:

$P_3(x_0) = y_0$, $L_0(x_0) = 1$, $L_1(x_0) = 0$, $L_2(x_0) = 0$ e $L_3(x_0) = 0$
$P_3(x_1) = y_1$, $L_0(x_1) = 0$, $L_1(x_1) = 1$, $L_2(x_1) = 0$ e $L_3(x_1) = 0$
$P_3(x_2) = y_2$, $L_0(x_2) = 0$, $L_1(x_2) = 0$, $L_2(x_2) = 1$ e $L_3(x_2) = 0$
$P_3(x_3) = y_3$, $L_0(x_3) = 0$, $L_1(x_3) = 0$, $L_2(x_3) = 0$ e $L_3(x_3) = 1$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \Delta_{ij}$$

Etapa 3
Os $L_i(x)$ são polinômios de grau 3.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Podemos verificar que depois destas três etapas o polinômio pode ser encontrado sem ter que resolver o sistema 4x4.

5.5 Fórmula Geral

Em geral para (x_i,y_i) i=0,1,2,3,4,5, ...,n
Teríamos que resolver um sistema de $n+1_x n+1$
A fórmula geral é dada pelas equações seguintes:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}$$

Exemplo:
Determinar o polinômio que passe por: (0,3) (1,5) (3,7) (4,9) e estimar o valor de y quando x=2

Solução:
$P_3(x) = 3L_0(x) + 5L_1(x) + 7L_2(x) + 9L_3(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = -\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = -\frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{6}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(0-4)} = -\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{6}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = -\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{12}$$

$$P_3(x) = \frac{3(x-1)(x-3)(x-4)}{12} + \frac{5(x-0)(x-3)(x-4)}{6} - \frac{7(x-0)(x-1)(x-4)}{6} + \frac{9(x-0)(x-1)(x-3)}{12}$$

$$P_3(2) = \frac{3(1)(-1)(-2)}{12} + \frac{5(2)(-1)(-2)}{6} - \frac{7(2)(1)(-2)}{6} + \frac{9(2)(1)(-1)}{12} = -\frac{1}{2} + \frac{10}{3} + \frac{14}{3} - \frac{3}{2} = \frac{24}{3} - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6$$

5.6 Algoritmo de Lagrange

O algoritmo é a implementação lógica das duas fórmulas dadas em 5.5

```
P1. Fornecer os valores de (xi,yi) i=0,1,2,3,4,5............,n, e o valor a interpolar x*,
    verificar se xi ≠xj
P2. soma ← 0
P3. Para i = 0 até n
        prod ← 1
        para j=0 até n
            Se i ≠ j
.               prod ← prod*(x*-xj)/(xi-xj)
            fim se
        fim para
        soma ← prod*yi
    fim para
P4. Mostrar soma // é o valor interpolado
```

5.7 Programa de Lagrange no SciLab

O programa foi feito para mostrar o polinômio e calcular após o valor interpolado:

```
// Lagrange
n=input('numero de pontos :');
[x]=input('Digite os valores de x(i),i=1 n entre colchetes:');
[y]=input('Digite os valores de y(i),i=1 n entre clochetes:');
for i=1:n
        for j=1:n
            if i <> j
                if x(i)==x(j)
                    abort
                end
            end
```

```
        end
end

xb=poly(0,"x");
yb=0;
for i= 1:n
        p=1;
        for j=1:n
                if i <> j then
                        p=p*(xb-x(j))/(x(i)-x(j));
                end
        end
        yb=yb+p*y(i);
end
yb
xp=input('valor a interpolar :');
horner(yb,xp)
```

Outros métodos que veremos a seguir baseiam-se no fato dos pontos estarem igualmente espaçados, isto é $x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=$ .... $=x_n-x_{n-1}=h$, e necessitamos definir um operador que facilite a notação das fórmulas que encontrarão os polinômios.

5.8 Diferencias Finitas

Seja o conjunto de pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n), tal que $x_i=x_0+i.h$, para i = 0, 1, 2, ..., n.

Definimos o operador diferença Δ incremento h, como:

$$\underset{h}{\Delta} f(x) = \underset{h}{\Delta}(x^3 - 2x + 1) = [(x+h)^3 - 2(x+h) + 1)] - [x^3 - 2x + 1]$$
$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h + 1 - x^3 + 2x - 1$$
$$= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h$$

5.9 Propiedades do operador

P1: $\underset{h}{\Delta}\big(f(x) + g(x)\big) = \underset{h}{\Delta} f(x) + \underset{h}{\Delta} g(x)$

P2: $\underset{h}{\Delta} c = 0,$ c constante

P3: $\underset{h}{\Delta} c.f(x) = c.\underset{h}{\Delta} f(x)$

P4: $\underset{h}{\Delta}\underset{h}{\Delta} f(x) = \underset{h}{\Delta^2} f(x)$

P5: $\underset{h}{\Delta^m}\underset{h}{\Delta^n} f(x) = \underset{h}{\Delta^{m+n}} f(x),$ m e n $\in Z^+$

P6: $\underset{h}{\Delta^n} P_n(x) = c,$ c constante

P7: $\underset{h}{\Delta^{n+1}} P_n(x) = 0$

5.10 Tabela de diferencias

Exemplo:
(0, 1) (1,2) (2,9) (3, 28)

Solução:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		1		
1	2		6	
		7		6 → $\Delta^3 y$
2	9		12	
		19		
3	28			

Termo Geral da Tabela

$$\underset{h}{\Delta^n} y_0, \qquad \underset{h}{\Delta^n} y_j$$

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$$
$$= y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta(y_2 - 2y_1 + y_0) = \Delta y_2 - 2\Delta y_1 - \Delta y_0$$
$$= (y_3 - y_2) - 2(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$
$$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

$$\Delta^n y_1 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y_{n-i} . (-1)^i$$

5.11 Atividades

1. Determine o tamanho do $h = x_{i+1} - x_i$ para a construção da tabela de $f(x) = e^x$ em [0,1] para que o erro de truncamento na interpolação linear seja menor que 0.005

2. Dado f(x) = sen x , f(0.1) = 0.09983 ; f(0.2) = 0.19867 Determine o valor f(0.16) e calcule o erro de truncamento

$$E_t = \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} \right| |f''(r)| \;,\; f''(r) = \max_x \{| f''(x)| \}$$

3. Para $f(x) = 5^x$ obtenha f(0.3) e o erro de truncamento se f(0.5) = 2.23608

5.11 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515

Interpolação Polinomial

META

Resolver o problema de interpolação para pontos igualmente espaçados, gerando um polinômio de grau n.

OBJETIVOS

Estudar os algoritmos de Newton para a construção destes polinômios.

6.1 Introdução

Os métodos seguintes usam as diferenças finitas na sua estrutura. Portanto, os pontos devem estar igualmente espaçados.

6.2 O método de Newton para interpolação

Seja o conjunto de pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n) igualmente espaçados:

$$x_1 = x_0 + i.h, \quad i = 0,1,2, ...,n$$

O polinômio de interpolação de Newton de grau n que passa pelos pontos dados é:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)... (x - x_{n-1})$$

$P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, ..., n$

$P_n(x_0) = y_0 = a_0$

$P_n(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x - x_0)$

$P_n(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

.

:

$P_n(x_n) = y_n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)... (x - x_{n-1})$

$y_1 = y_0 + a_1.h \rightarrow a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$

$y_2 = y_0 + a_1.2h + a_2.2h.h$

$y_2 = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{h}.2h + a_2.2h^2 \rightarrow a_2 = \frac{-2y_1 + y_0 + y_2}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}$$

.

:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\,h^i}$$

$$P_n = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

6.3 Notação fatorial decrescente

$$(x - x_0)(x - x_1) = (x - x_0)^{(2)}$$

Significa que tem-se dois fatores de base $(x - x_0)$ decrementando o outro fator em h.

$$(x - x_0)(x - x_0 - h) = (x - x_0)(x - x_1)$$

Em geral:

$$x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)(x-3h)..(x-(n-1)h)$$

6.4 Primeira Fórmula de Newton

A primeira fórmula de Newton pode ser escrita em forma compacta usando a notação fatorial geral decrescente.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}(x - x_0)^{(i)}$$

Primeira Fórmula de Newton ou Newton Progressiva

Exemplo:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	1	6	6
1	2	7	12	
2	9	19		
3	28			

h = 1

$$P(x) = 1 + \frac{1}{1!1}(x - x_0) + \frac{6}{2!1^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{6}{3!1^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P(x) = 1 + x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 1 + x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x =$$

$$= x^3 + 1$$

6.5 Segunda fórmula de Newton

Seja o conjunto de pontos igualmente espaçados:

$$(x_0, y_0)\ (x_1, y_1)\ (x_2, y_2)\ \dots\ (x_n, y_n)$$

tais que:

$$x_i = x_0 + i.h \quad , \quad i = 1, 2, 3,..., n$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + a_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + \\ +...+ a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})...(x-x_1)$$

$$P(x_i) = y_i \quad \forall i$$

$$\begin{cases} P(x_n) = y_n = a_0 \\ P(x_{n-1}) = y_{n-1} = a_0 + a_1(x_{n-1}-x_n) \\ \quad : \\ \quad : \\ P(x_0) = y_0 = a_0 + a_1(x_0-x_n) + a_2(x_0-x_n)(x_0-x_{n-1}) +...+ \\ \quad + a_n(x_0-x_n)(x_0-x_{n-1})...(x_0-x_1) \end{cases}$$

$$a_0 = y_n$$

$$y_{n-1} = a_0 + a_1(-h) \quad \rightarrow \quad a_1 = -\frac{y_{n-1}-a_0}{h} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}$$

$$y_{n-2} = a_0 + a_1(-h) + a_2(-2h)(-h)$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}$$

$$:$$

$$:$$

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}$$

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) +...+ \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})...(x-x_1)$$

6.6 Notação fatorial crescente

$$(x-x_n)(x-x_{n-1}) = (x-x_n)^{|2|} = (x-x_n)(x-x_n+h)$$

Em geral:

$$x^{|n|} = x(x+h)(x+2h)(x+3h)...(x+(n-1)h)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}(x - x_n)^{|i|}$$

6.7 Método de Aitken

Este é um outro método para encontrar um polinômio que passe pelos pontos dados. E estes podem estar desigualmente espaçados.

Seja o conjunto de pontos (x_0,y_0) (x_1,y_1) (x_2,y_2) ... (x_n,y_n), não necessariamente igualmente espaçados.

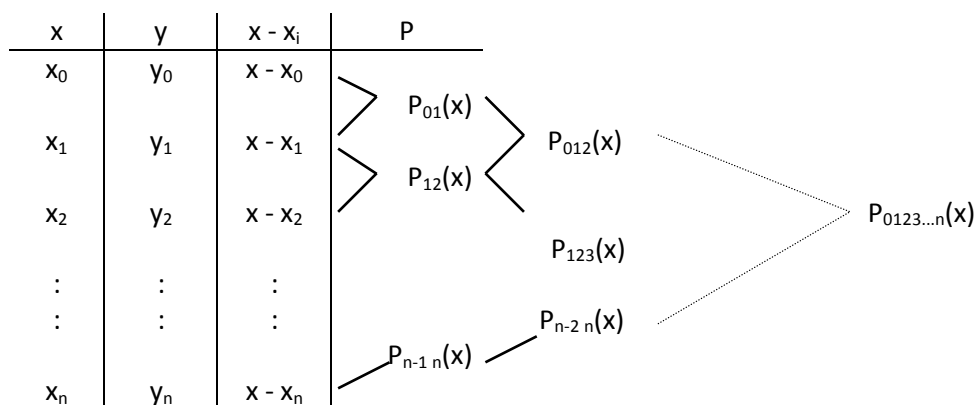
O polinômio linear interpolante para o par de pontos (x_0,y_0) , (x_1,y_1) é:

$$P_1(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad \text{(Fórmula de Lagrange)}$$

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0 (x - x_0)}{h} \qquad \text{(Fórmula de Newton)}$$

$$P_1(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Tabela de Aitken

x	y	x - x_i	P		
x_0	y_0	x - x_0			
			$P_{01}(x)$		
x_1	y_1	x - x_1		$P_{012}(x)$	
			$P_{12}(x)$		$P_{0123...n}(x)$
x_2	y_2	x - x_2			
				$P_{123}(x)$	
:	:	:			
:	:	:		$P_{n-2\ n}(x)$	
			$P_{n-1\ n}(x)$		
x_n	y_n	x - x_n			

$P_{01}(x)$ é um polinômio de grau 1 que passa pelos pontos (x_0,y_0) , (x_1,y_1).

$P_{12}(x)$ é um polinômio de grau 1 que passa pelos pontos (x_1,y_1) , (x_2,y_2).

$$P_{01}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_1 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} P_{01}(x_0) = y_0 \\ P_{01}(x_1) = y_1 \end{matrix}$$

$$P_{12}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \begin{vmatrix} x - x_1 & y_1 \\ x - x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} P_{12}(x_1) = y_1 \\ P_{12}(x_2) = y_2 \end{matrix}$$

O polinômio $P_{012}(x)$ definido como:

$$P_{012}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & P_{01}(x) \\ x - x_2 & P_{12}(x) \end{vmatrix}$$

é um polinômio de grau 2 e que passa pelos pontos (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2).

$$P_{012}(x_0) = \frac{1}{x_2 - x_0}[(x_0 - x_0).P_{12}(x_0) - (x_0 - x_2).P_{01}(x_0)] = P_{01}(x_0) = y_0$$

$$P_{012}(x_1) = \frac{1}{x_2 - x_0}[(x_1 - x_0).P_{12}(x_1) - (x_1 - x_2).P_{01}(x_1)] =$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_0}[h.y_1 - (-h)y_1] = \frac{2.h.y_1}{2.h} = y_1$$

$$P_{012}(x_2) = \frac{1}{x_2 - x_0}[(x_2 - x_0).P_{12}(x_2) - (x_2 - x_2).P_{01}(x_2)] =$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_0}(x_2 - x_0).y_2 = y_2$$

$$P_{0123 \ldots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & P_{012 \ldots n-1}(x) \\ x - x_n & P_{123 \ldots n-1}(x) \end{vmatrix}$$

6.8 Interpolação Inversa

Seja o conjunto de pontos (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) ... (x_n, y_n).

Dado um $\bar{y}$ determinar o $\bar{x}$.

O polinômio deve passar pelos pontos (y_1, x_1) (y_2, x_2) ... (y_n, x_n) , isto é, $P_n(y_i) = x_i$.

<u>Solução por Lagrange:</u>

$$P_n(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i . L_i(y)$$

$$L_i(y) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{y - y_i}{y_i - y_j}$$

6.9 Atividades

1. Determine :

   a) $\Delta_{1}^{k}\ x$ b) $\Delta_{h}\ x^{(n)}$

   c) $\Delta_{1}\ \text{sen}\ x$ d) $\Delta_{1}\ f(x+h)$

   e) $\Delta\ x!$ f) $\Delta (x + n)^{|n|}$

2. Encontre a formula geral para um elemento da tabela de diferenças finitas.

3. Determine log 4.5 da tabela a seguir pelo método de Aitken

x	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8
log x	0.60206	0.62325	0.64345	0.66276	0.68124

6.10 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515

Aproximação por Mínimos Quadrados

META

Resolver o problema de aproximação usando métodos de otimização.

OBJETIVOS

Estudar os algoritmos de Mínimos quadrados para diferentes tipos de funções.

lino@ufs.br

7.1 Introdução

A aproximação por mínimos quadrados é um método de otimização. Dados um conjunto de pontos (x_i,y_i) i=0,1,2,3,4,.........,n, a priori é definida uma função que tende a aproximar os pontos dados. Pode ser um polinômio, uma função logarítmica, exponencial ou trigonométrica. Escolhe-se uma métrica que meça os pontos dados à função, e escolhemos os parâmetros da melhor função que se ajusta aos pontos.

7.2 Método de Mínimos Quadrados

Seja o conjunto de pontos (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) … (x_n, y_n).
Seja uma função f(x) que ajustará os pontos dados, através de uma métrica d_i.

<u>Exemplos de métricas:</u>

$$d_i = f(x_i) - y_i$$
$$|d_i| = |f(x_i) - y_i|$$
$$(d_i)^2 = (f(x_i) - y_i)^2$$
$$\min \sum \mathrm{d_i}$$
$$\min \sum_{i=0}^{n} d_i^2$$

<u>Mínimos Quadrados</u>

Seja $f(x) = P_1(x)$:

$$P_1(x) = a_0 + a_1.x$$
$$d_i = P_1(x_i) - y_i$$
$$d_i = a_0 + a_1.x_i - y_i$$
$$\min \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \min \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1.x_i - y_i)^2$$
$$G(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1.x_i - y_i)^2$$

$$\frac{\partial G(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 0$$
$$\frac{\partial G(a_0, a_1)}{\partial a_1} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1.x_i - y_i)(1) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1.x_i - y_i)(x_i) = 0$$

$$\sum a_0 + a_1 \sum x_i - \sum y_i = 0$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 - \sum x_i.y_i = 0$$

$$(n+1)a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_i \sum x_i^2 = \sum x_i.y_i$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i.y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (n+1) & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n+1 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i.y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (n+1) & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}$$

Se o polinômio for de grau 2:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$d_i = P_2(x_i) - y_i$$

$$\min \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$$

$$G(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = 0; \ \frac{\partial G}{\partial a_1} = 0 \ \text{e} \ \frac{\partial G}{\partial a_2} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)(1) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)(x_i)^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i.y_i \\ \sum x_i^2.y_i \end{bmatrix}$$

→ Matriz Simétrica

Em geral:

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^{\ 2} & \cdots \sum x_i^{\ n} \\ \sum x_i & \sum x_i^{\ 2} & \sum x_i^{\ 3} & \cdots \sum x_i^{\ n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \quad \vdots \\ \sum x_i^{\ n} & \sum x_i^{\ n+1} & \sum x_i^{\ n+2} & \cdots \sum x_i^{\ n+n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i . y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^{\ n} . y_i \end{bmatrix}$$

7.3 Atividades

1. O volume de álcool anídrico em função da temperatura esta dado pela tabela abaixo:

Temp (Graus C)	13.9	43.0	67.8	89.0	99.2
Volume(cm^3)	1.04	1.12	1.19	1.24	1.27

Fazer um ajuste para $v(t) = 1 + bt + ct^2$
Construir a tabela v = v(t) para t = 20(5)40

2. Dada a tabela

x	1.0	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35
y	1.0	1.01	1.02	1.04	1.05	1.06	1.065	1.08

Estimar f(1.22) por regresão linear.

7.3 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515

Integração Numérica

META

Resolver uma integral usando aproximação polinomial.

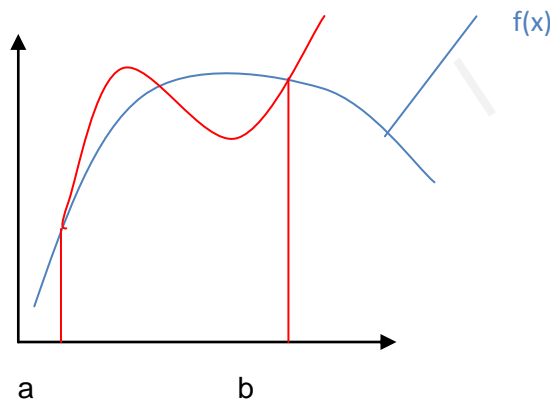
OBJETIVOS

Estudar os algoritmos que resolvem em forma aproximativa a integral de uma função e estimar o seu erro.

lino@ufs.br

8.1 Introdução

Os métodos de aproximação polinomial são usados para integrar numericamente uma função y=f(x) num intervalo dado [a,b] ou mesmo um conjunto de pontos (x_i,f(y_i)) i=0,1,2,3,4,.........,n.

Casos em que a função é difícil integral ou não tem solução analítica, um polinômio sempre é de integração imediata.

A área fechada em vermelho representa a integral definida do polinômio, e a línha em azul é a função.

8.2 Integração Numérica

Seja a integral definida da função f(x):

$$\int_a^b f(x)dx$$

A integração numérica é utilizada quando não conhecemos a função, e sim pontos dela, ou a função não é uma função integrável analiticamente.

Solução:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

Aproximação Linear:

$$\int_a^b (a_0 + a_1.x)dx = [a_0 + a_1 x/2]_a^b = a_0.b + (a_1.b^2/2) - a_0.a - (a_1.a^2/2)$$

Dados dois pontos de f(x): (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) \qquad \text{(Newton Progressivo)}$$

onde :

$$h = (x_1 - x_0)$$
$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$a = x_0$$
$$b = y_0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} [y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)]\,dx = y_0.x + \frac{\Delta y_0}{h}(x^2/2 - x.x_0)\Big|_{x_0}^{x_1} =$$
$$= y_0.x + \frac{\Delta y_0}{h}(x_1^{\ 2}/2 - x_1.x_0) - y_0 x_0 - \frac{\Delta y_0}{h}(\frac{x_0^{\ 2}}{2} - x_0^{\ 2}) =$$
$$= y_0.(x_1 - x_0) + \frac{\Delta y_0}{h}(x_1^{\ 2}/2 - x_1.x_0 + x_0^{\ 2}/2) =$$
$$= y_0.h + \frac{\Delta y_0}{h}\cdot\frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 = y_0.h + \frac{\Delta y_0.h^2}{2h} =$$
$$= \frac{\Delta y_0.h}{2} + y_0.h = h\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right) = \left(\frac{2y_0 + y_1 - y_0}{2}\right)\cdot h =$$
$$= h\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) = \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$$

$$\int_{x_0}^{x} P_1(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$$

$$A = [y_0 + y_1]\frac{h}{2} \qquad , \qquad A = \text{Área do Trapézio}$$

Para (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$$
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} [y_2 + \frac{\Delta y_1}{h}\cdot(x - x_2) + \frac{\Delta^2 y_1}{2.h^2}(x - x_2)^{|2|}]\,dx$$

Seja $t = \frac{x - x_2}{h}$.

$$\text{Para } x = x_0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{x_0 - x_2}{h} = \frac{-2.h}{h} = -2$$

$$\text{Para } x = x_2 \quad \rightarrow \quad t = \frac{x_2 - x_2}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\begin{aligned}(x - x_2)^{|2|} &= (x - x_2)(x - x_2 + h) = \\ &= (x - x_2)(x - (x_2 - h)) = \\ &= (x - x_2)(x - x_1)\end{aligned}$$

$$\frac{(x - x_2)^{|2|}}{h^2} = \frac{(x - x_2)}{h} \cdot \frac{(x - x_1)}{h} = t(t + 1)$$

$$dt = \frac{1}{h}dx \quad \rightarrow \quad dx = h.dt$$

$$\int_{-2}^{0}[y_2 + \Delta y_1 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2} t(t+1)].h.dt = h[y_2 t + \frac{\Delta y_1 t}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)]_{-2}^{0} =$$

$$= h[2y_2 - 2\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_0}{2}\left(\frac{-8}{3} + \frac{4}{2}\right)] =$$

$$= h[2y_2 - 2\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot \frac{2}{3}] =$$

$$= h[2y_2 - 2\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_0}{3}] =$$

$$= \frac{1}{3}h[6y_2 - 6\Delta y_1 - \Delta^2 y_0] =$$

$$= \frac{1}{3}h[6y_2 - 6y_2 + 6y_1 - \Delta^2 y_0] =$$

$$= \frac{1}{3}h[6y_1 + y_2 - 2y_1 + y_0] = \frac{1}{3}h[6y_1 + y_2 - 2y_1 + y_0]$$

8.3 Fórmula Geral (Newton - Cotes)

Seja o conjunto de pontos (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) … (x_n, y_n).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i.L_i(x) \quad \text{(Fórmula de Lagrange)}$$

Sejam os pontos igualmente espaçados:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Se $x_i = x_0 + i.h$:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{i.h.(i-1).h.(i-2).h.....h.(-h).(-2h)....-(n-i).h}$$

Seja $S = \frac{x-x_0}{h}$, então:

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-(x_0+h)}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = S-1$$

$$\frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_0-2h}{h} = S-2$$

$$L_i(S) = \frac{S(S-1)(S-2)(S-3)\ldots(S-(i-1))(S-(i+1))\ldots(S-n)}{i.(i-1).(i-2)\ldots1.(-1).(-2)\ldots(n-1)}$$

$$L_i(S) = \frac{S^{(n+1)}(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!(S-i)}$$

$$Para \quad x = x_0 \quad \rightarrow \quad S = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0$$

$$x = x_n \quad \rightarrow \quad S = \frac{x_n - x_0}{h} = n$$

$$dS = \frac{1}{h}dx \rightarrow dx = h.dS$$

$$h\int_0^n P(S)dS = h\int_0^n \sum_{i=0}^{n} y_i.L_i(S)dS = h\sum_{i=0}^{n} y_i \int_0^n \frac{S^{(n+1)}(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!(S-i)}ds$$

Se n = 1 $\rightarrow$ Trapezoidal
n = 2 $\rightarrow$ Simpson

$$h\sum_{i=0}^{n} y_i \int_0^1 \frac{S^{(2)}(-1)^{1-i}}{i!(1-i)!(S-i)}ds = h[y_0 \int_0^1 \frac{S^{(2)}(-1)^{1-0}}{0!(1-0)!(S-0)}ds + y_1 \int_0^1 \frac{S^{(2)}(-1)^{1-1}}{1!(1-1)!(S-1)}ds] =$$

$$"S^{(2)} = S(S-1)"$$

$$= h[y_0 \int_0^1 (S-1)(-1)ds + y_1 \int_0^1 S ds] =$$

$$= h[-y_0 \left.\frac{S^2}{2}\right|_0^1 + y_0 S|_0^1 + y_1 \left.\frac{S^2}{2}\right|_0^1] =$$

$$= h[-y_0[\frac{1}{2}-1] + y_1[\frac{1}{2}]] =$$

$$= h[\frac{1}{2}y_0 + \frac{y_1}{2}] = \frac{h}{2}[y_0 + y_1]$$

8.4 Método de Romberg para Integrações Numéricas

Seja o conjunto de pontos $(x_0, y_0)(x_1, y_1)(x_2, y_2)\ldots(x_n, y_n)$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

A idéia de Romberg é repetir fórmulas que implicitamente geram polinômios de interpolação de grau n.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h_1} f(x)dx + \int_{a+h_1}^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h_2} f(x)dx + \int_{a+h_2}^{a+2h_2} f(x)dx + \int_{a+2h_2}^{a+3h_2} f(x)dx + \int_{a+3h_2}^b f(x)dx$$

:

:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_{a+ih_n}^{a+(i+1)h_n} f(x)dx$$

As integrais são aproximadas pela Trapezoidal:

$$n=0 \rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ , h = b - a } \rightarrow T_0 = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$n=1 \rightarrow T_1 = \frac{h_1}{2}[f(a)+f(a+h_1)] + \frac{h_1}{2}[f(a+h_1)+f(b)] =$$

$$T_1 = \frac{h_1}{2}[f(a)+2f(a+h_1)+f(b)] \text{ , } h_1 = \frac{h}{2}$$

$$n=2 \quad \rightarrow \quad T_2 = \frac{h_2}{2}[f(a)+f(a+h_2)] + \frac{h_2}{2}[f(a+h_2)+f(a+2h_2)] +$$

$$+\frac{h_2}{2}[f(a+2h_2)+f(a+3h_2)] + \frac{h_2}{2}[f(a+3h_2)+f(b)], \; h_2 = \frac{h_1}{2}$$

$$n=k \quad \rightarrow \quad T_k = \frac{h_k}{2}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{2^k-1} f(a+ih_k) + f(b)]$$

Para entender a idéia de Romberg é necessário saber o erro na fórmula Trapezoidal.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] \; , h = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = V_e \quad e \quad \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] = V_a$$

$$\varepsilon_T = V_e - V_a = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$\varepsilon_T(h) = \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a)+f(a+h)]$$

$$\varepsilon'_T = f(a+h) - \frac{h}{2}[f'(a+h)] - \frac{1}{2}[f(a)+f(a+h)]$$

$$\varepsilon''_T = f'(a+h) - \frac{h}{2}[f''(a+h)] - \frac{1}{2}f'(a+h) - \frac{1}{2}f'(a+h)$$

$$\varepsilon'_T = -\frac{h}{2}f''(a+h)$$

$$f''(\xi) = \max_h \{f''(a+h)\}$$

$$|\varepsilon''_T(h)| \le \left|\frac{h}{2}f''(\xi)\right|$$

$$\varepsilon''_T(h) \le -\frac{h}{2}f''(\xi)$$

$$\int \varepsilon''_T(h)\,dh \le \int -\frac{h}{2}f''(\xi)\,dh$$

$$\varepsilon'_T(h) \le -\frac{h^2}{2.2}f''(\xi) + c$$

Se h = 0:

$$\varepsilon'(0) \le 0 + c \quad \rightarrow \quad c = 0$$

$$\varepsilon'(0) = f(a+0) - \frac{0}{2}[] - \frac{1}{2}[f(a)+f(a+0)] = 0$$

$$\int \varepsilon'(h)dh \le \int -\frac{h^2}{4} f''(\xi)dh$$

$$\varepsilon(h) \le -\frac{h^3}{12} f''(\xi) + c$$

$$\varepsilon(h) \le -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

O erro é calculado somente se conhecer a função f(x).

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_0 = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$

h = b – a

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_1 = \frac{h_1}{2}[f(a) + 2f(a+h_1) + f(b)]$$

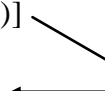
$$1)\ \varepsilon_{T_0} = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$2)\ \varepsilon_{T_1} = -\frac{h_1^3}{12} f''(\xi_1) - \frac{h_1^3}{12} f''(\xi_2)$$

$$3)\ f''(\xi) = \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}$$

$$4)\ \varepsilon_{T_1} = -\frac{2.h_1^3}{12} f''(\xi)$$

$$5)\ h_1 = \frac{h}{2} \text{ então } \varepsilon_{T_0} = -\frac{(2h_1)^3}{12} f''(\xi) \qquad (1)$$

$$6)\ \varepsilon_{T_0} = -\frac{8h_1^3}{12} f''(\xi) \qquad (5)$$

7) De (4) e (6)

$$\varepsilon_{T_1} = -\frac{2h_1^3}{12} f''(\xi)$$

$$\varepsilon_{T_0} = -\frac{4.2h^3}{12} f''(\xi)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{T_0} = 4\varepsilon_{T_1}$$

$$\varepsilon_{T_0} = \int_a^b f(x)dx - T_0 \quad \Big\| \quad \varepsilon_{T_1} = \int_a^b f(x)dx - T_1$$

$$\int_a^b f(x)dx - T_0 = 4[\int_a^b f(x)dx - T_1]$$

$$4T_1 - T_0 = 3\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4T_1 - T_0}{3}$$

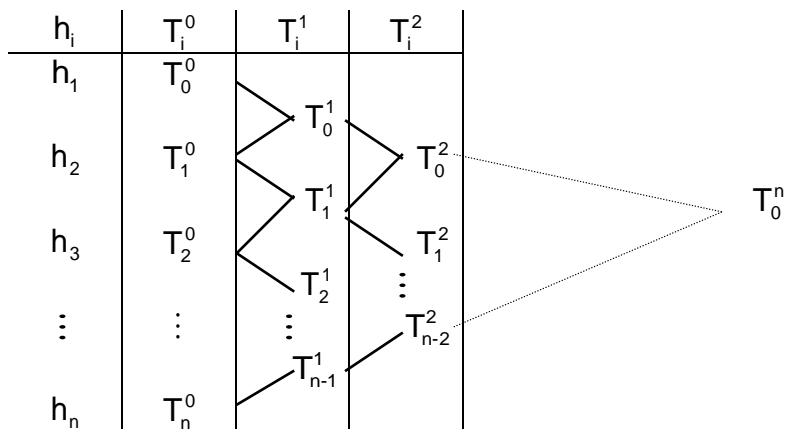
$$4T_1 = 4[\frac{h_1}{2}(f(a) + 2f(a+h_1) + f(b))]$$

$$T_0 = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{2h_1}{2}[f(a) + f(b)]$$

$$4T_1 - T_0 = 2h_1((f(a) + 2f(a+h_1) + f(b))) - h_1((f(a) + f(b))) =$$
$$= h_1((f(a) + 4f(a+h_1) + f(b)))$$

$$\frac{4T_1 - T_0}{3} = \frac{h_1}{3}[f(a) + 4f(a+h_1) + f(b)]$$

Fórmula de Simpson

8.5Tabela de Romberg

$$T_0^1 = \frac{4T_1^0 - T_0^0}{3}$$

$$T_1^1 = \frac{4T_2^0 - T_1^0}{3}$$

$$\vdots$$

$$T_i^1 = \frac{4T_{i+1}^0 - T_i^0}{3}$$

$$T_0^2 = \frac{16T_1^1 - T_0^1}{15}$$

$$T_i^2 = \frac{16T_{i+1}^1 - T_i^1}{15}$$

$$T_0^3 = \frac{4^3 T_1^2 - T_0^2}{4^3 - 1}$$

Em geral:

$$T_i^j = \frac{4^j T_{i+1}^{j-1} - T_i^{j-1}}{4^j - 1}$$

8.6 Atividades

1. Determinar fórmulas para integrar

$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$ e $\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx$ usando aproximações de f(x) por polinômios de interpolação Newton progressivo e regressivo.

2. Calcular a integral $\int_0^1 e^{-x}dx$ utilizando a fórmula trapezoidal para n=10 e estimar o erro.

3. Calcular as seguintes integrais pela fórmula trapezoidal e Simpsom com erro menor que 0.01. Determine o h que faz o erro menor que 0.01

a) $\int_0^1 dx/(1+x^3)$ b) $\int_1^2 x\ln x dx$

c) $\int_1^2 e^x / xdx$ d) $\int_1^2 \cos x / xdx$

4. Encontre a fórmula geral para a regra trapezoidal n intervalos igualmente espaçados

5. Seja o intervalo h_0 = b-a, $h_1 = h_0/2$,...... $h_n = h_{n-1}/2$ Encontre as trapezoidais T^0, T^1, T^2, ...T^n

6. Determine a fórmula de T^i em função de T^{i-1}

8.7 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515

Solução de Sistemas Lineares

META

Resolver o problema de equações lineares de qualquer tamanho.

OBJETIVOS

Estudar os diversos algoritmos, analíticos e aproximativos e sua implementação no computador.

9.1 Introdução

Muitos problemas de engenharia e pesquisa operacional são resolvidos usando a álgebra linear. Isto é, matematicamente são reduzidos estes problemas a um sistema de equações lineares. Por exemplo: Cálculo da tensão em estruturas da construção civil, solução de equações diferenciais parciais, determinar o potencial em redes elétricas, problemas de otimização, etc.

Quando o sistema é de grande porte, devemos ter cuidado de preservar ao máximo a melhor exatidão e precisão.

9.2 Solução de Sistemas Lineares

Seja o sistema:

$$Ax = b$$

onde:

$$A = (a_{ij})_{nxn} \text{ , } x = (x_i) \text{ , } b = (b_i)$$

i = 0, 1, 2, ..., n
j = 0, 1, 2,..., n

ou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ , } i = 1, 2, 3, ..., n$$

Um sistema linear nxn que admite uma única solução é chamado de **determinado**, se admite várias soluções é dito de **indeterminado**, e se não admite solução ele é **impossível.**

9.3 Solução algébrica:

$$Ax = b$$

1) Se o determinante de $|A| \neq 0$, então <u>existe</u> inversa da matriz A, A^{-1}.

2) Multiplicando a esquerda por A^{-1}:

$$A^{-1}.Ax = A^{-1}.b$$
$$Ix = A^{-1}.b$$

3) $x = A^{-1}.b$ (Solução teórica)

Na prática, se o sistema for de ordem $n \geq 5$, há dificuldade de resolver em forma manual.

9.4 Método de Eliminação Gaussiana

Seja o sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_{45} \end{aligned}$$

O método consiste em transformar o sistema $Ax = b$ em outro sistema equivalente Dx = f, tal que, D é uma matriz triangular superior.
Para isto, utilizam-se as propriedades das equações:

P1: Se multiplicamos por uma constante uma equação a equação não varia.
P2: A soma de duas equações é linearmente dependente as equações somadas

A transformação ocorre usando estas duas propriedades

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad Dx = f$$

A matriz D resultante é triangular superior.

Exemplo de matriz triangular superior:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9.5 Algoritmo de triangularização

Passo 1: Se $a_{11} = 0$ então "Troca linha 1 por linha i, i = 2, 3, 4"

$$\text{linha } 1 \leftarrow \text{linha } 1$$

$$\text{linha } 2 \leftarrow \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \cdot linha\,1 + linha\,2$$

$$\text{linha } 3 \leftarrow \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) \cdot linha\,1 + linha\,3$$

$$\text{linha } 4 \leftarrow \left(-\frac{a_{41}}{a_{11}} \right) \cdot linha\,1 + linha\,4$$

Passo 2: Se $a_{22} = 0$ então "Troca linha 2 por linha i, i = 3, 4"

$$\text{linha } 1 \leftarrow \text{linha } 1$$

$$\text{linha } 2 \leftarrow \text{linha } 2$$

$$\text{linha } 3 \leftarrow \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \cdot \text{linha } 2 + \text{linha } 3$$

$$\text{linha } 4 \leftarrow \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}} \right) \cdot \text{linha } 2 + \text{linha } 4$$

Passo 3: Se $a_{33} = 0$ então "Troca linha 2 por linha i, i = 4"

$$\text{linha } 1 \leftarrow \text{linha } 1$$

$$\text{linha } 2 \leftarrow \text{linha } 2$$

$$\text{linha } 3 \leftarrow \text{linha } 3$$

$$\text{linha } 4 \leftarrow \left(-\frac{a_{43}}{a_{33}} \right) \cdot \text{linha } 3 + \text{linha } 4$$

Para encontrar o termo geral definimos três índices.
Índice para o Passo: k = 1, 2, 3;
Índice para a linha: i = k+1,....,4;
Índice para a coluna: j = k,.........,5.

Algoritmo:

Para k = 1, 2, 3
    Se $a_{kk} = 0$ então Rotina Troca
    Para i = k+1 até 4
        Para j = k até 5

$$a_{ij} = \left(-\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right) \cdot a_{kj} + a_{ij}$$

        Fim
    Fim
Fim

Para qualquer N:
k = 1 até N-1
i = k+1 até N
j = k até N+1

$$x_4 = a_{45} / a_{44}$$
$$x_3 = (a_{35} - a_{34}x_4) / a_{33}$$
$$x_2 = (a_{25} - a_{23}x_3 - a_{24}x_4) / a_{22}$$
$$x_1 = (a_{15} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4) / a_{11}$$

Termo geral:

$$x_n = a_{n\ n+1} / a_{n\ n}$$

$$x_j = (a_{j\ N+1} - \sum_{r=j+1}^{N} a_{ir}x_r) / a_{jj}$$

j = n-1,n-2,..................3,2,1

Exemplo:

$$\begin{cases} -3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução:

Passo 1: k = 1

$$\begin{matrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 2} \leftrightarrow \text{Linha 1}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 3} \leftarrow \text{(Linha 1)(-1)+Linha 3}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix}$$

Passo 2: k = 2

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 3} \leftarrow \text{(Linha 2)(-1)+Linha 3}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_2 + x_3 = -2 \\ -x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{matrix}$$

9.6 Método de Gauss-Jordan

Seja $Ax = b$.

O método para a solução do sistema consiste em transformá-lo em outro sistema identidade Ix = b, usando as mesmas propriedades das equações aplicadas no método de triangularização.

Para uma matriz 3x3:

Passo 1: Se $a_{11} = 0$ $\Rightarrow$ Rotina de Troca i = 1, 2, 3

linha 1 $\leftarrow$ linha 1 / a_{11}

linha 2 $\leftarrow$ (- a_{21}).linha 1 + linha 2

linha 3 $\leftarrow$ (- a_{31}).linha 1 + linha 3

Passo 2: Se $a_{22} = 0$ $\Rightarrow$ Rotina de Troca i = 2, 3

linha 2 $\leftarrow$ linha 2 / a_{22}

linha 1 $\leftarrow$ (- a_{12}).linha 2 + linha 1

linha 3 $\leftarrow$ (- a_{32}).linha 2 + linha 3

Passo 3: Se $a_{33} = 0 \Rightarrow$ Rotina de Troca i = 3

linha 3 $\leftarrow$ linha 3 / a_{33}
linha 1 $\leftarrow$ (- a_{13}).linha 3 + linha 1
linha 2 $\leftarrow$ (- a_{23}).linha 3 + linha 2

Passo $\rightarrow$ k = 1, 2, 3
Linha $\rightarrow$ i = 1, 2, 3
Coluna $\rightarrow$ j = 1, 2, 3, 4

Algoritmo:

Para k = 1 até N
    Se $a_{kk} = 0$ então Rotina Troca
    Para i = 1 até N
        Se i = k então
            Para j = k até 5
                $a_{ij} = a_{ij} / a_{kk}$
            Fim
        Senão
            Para j = 1 até N+1
                $a_{ij} = (a_{ik}).a_{kj} + a_{ij}$
            Fim
        Fim
    Fim
Fim

Solução do sistema:

$$x_i = a_{i\,N+1}\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 0x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{matrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 1} \leftrightarrow \text{Linha 2}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 3} \leftarrow \text{(Linha 1)(-1)+Linha3}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Linha 2} \leftarrow \text{Linha 2/(-3)}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{matrix} \xrightarrow[\text{Linha 3} \leftarrow \text{Linha 2(3)+Linha 3}]{\text{Linha 1} \leftarrow \text{Linha 2(-1)+Linha 1}} \begin{matrix} 1 & 0 & 4/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 4/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{\text{Linha 3} \leftarrow \text{Linha 3(-1)} \\ \text{Linha 1} \leftarrow \text{Linha 3(-4/3)+Linha 1} \\ \text{Linha 2} \leftarrow \text{Linha 3(1/3)+Linha 3}}} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$x_3 = 1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 1$

9.7 Atividades

1. Resolva o seguinte sistema de equações pelo método de eliminação gaussiana usando as funções do SciLab.

$$\begin{aligned} x - y - z &= -4 \\ 5x - 4y + 3z &= -12 \\ 2x + y + z &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 10 \\ 2w + 3x + y + 5z &= 31 \\ -w + x - 5y + 3z &= -2 \\ 3w + x + 7y - 2z &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 6y - z &= 2 \\ 5x - y + 2z &= 29 \\ -3x - 4y + z &= 18 \end{aligned}$$

2.- Resolver pelo método de eliminação gaussiana , método Gauss-Jordanl, o seguinte sistema tridiagonal ou matriz banda, usando as funções do Scilab.

$$\begin{aligned} 2x1 - x2 &= 1 \\ -x1 + 2x2 - x3 &= 1 \\ - x2 + 2x3 - x4 &= 1 \\ - x3 + 2x4 - x5 &= 1 \\ - x4 + 2x5 - x6 &= 1 \\ - x5 + 2x6 &= 1 \end{aligned}$$

9.8 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515

Solução de Sistemas Lineares
(continuação)

META

Resolver o problema de um sistema linear, de qualquer tamanho.

OBJETIVOS

Estudar os algoritmos de fatoração LU e métodos iterativos.

lino@ufs.br

10.1 Introdução

Os métodos de fatoração são especialmente úteis quando se tem que a matriz A pode ser expressa em um produto de matrizes LU, onde L é uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior, definidas adiante.

Se os valores iguais a 1 estão na diagonal L, o método é chamado de **método de Doolittle** e se os valores 1 estão na diagonal U , o método é chamado de **método de Crout**.

Os métodos iterativos são aproximações sucessivas de vetores solução que tendem ao valor exato no limite. Requerem uma condição de convergência.

10.2 Fatoração L.U.

Seja o sistema Ax = b.

O método consiste em transformar a matriz A em um produto de matrizes triangulares:

$$A = LU$$

$$A = (a_{ij})_{nxn}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ax = b => LUx = b => fazendo Ux = z

Lz = b Sistema triangular inferior resolvido em forma recursiva e:
Ux = z outro sistema triangular resolvido recursivamente.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \quad = \quad L \quad . \quad U$$

$$l_{11} = a_{11}$$
$$l_{11}.u_{12} = a_{12} \rightarrow u_{12} = a_{12} / l_{11} \ , \ l_{11} \neq 0$$

"Multiplica cada linha de L com todas as colunas de U"

10.3 Métodos Iterativos para a Solução de Ax = b

Seja o sistema Ax = b.

Passo 0:
Transformar o sistema Ax = b em outro sistema equivalente de forma :

$$\vec{x} = C\vec{x} + \vec{f}$$

Passo 1:
Valores iniciais:

$$\vec{x}^0 = \vec{f}$$
$$j \leftarrow 0$$

Passo 2:

$$j \leftarrow j+1$$
$$\vec{x}_j = C\vec{x}^{j-1} + \vec{f}$$

Passo 3:
Se $|x_i^j - x_i^{j+1}| < \varepsilon \quad \forall i$
então Solução aproximada $\vec{x}^j$
Senão Volta ao Passo 2

O algoritmo gera uma seqüência $\{\vec{x}\} \rightarrow \vec{x}*$ como solução.

$$\{\vec{x}\} \Rightarrow \vec{x}^0, \vec{x}^1, \vec{x}^2, \vec{x}^3, \ldots, \vec{x}^n$$

$$\vec{X}^j = \begin{bmatrix} \vec{x}_1^j \\ \vec{x}_2^j \\ \vdots \\ \vec{x}_n^j \end{bmatrix}$$

10.4 Condições de Convergência

Para que a seqüência gerada, $\{\vec{x}^j\}$, seja convergente, é necessário que $\|C\| < 1$ ($\|C\|$ - norma da matriz).

Norma da matriz C

$$\|C\| = mín\{\|C\|_l, \|C\|_c\}$$

$\|C\|_l \rightarrow$ norma da matriz linha

$$\|C\|_l = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \right\}$$

$$\|C\|_c = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| \right\}$$

$$\|C\| < 1$$

"Ou a soma de todos os elementos das linhas ou a soma de todos os elementos das colunas deve ser menor que 1".

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\|A\| = mín\{\|A\|_l, \|A\|_c\}$$

$$\|A\|_l = \max\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}\right)\right\} = \frac{5}{6}$$

$$\|A\|_c = \max\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right), \left(1+\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{5}{4}$$

$$\|A\| = mín\left\{\frac{5}{6}, \frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{6} < 1$$

Seja o sistema Ax = b, sistema Diagonal dominante, então:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{array}$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Solução:

$$x_1 = 0x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}$$
$$x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + 0x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 1$$
$$x_3 = \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 + 0x_3 + 1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$x = Cx + f$$

$$\|C\| = mín\{\|C\|_l, \|C\|_c\}$$
$$\|C\|_l = \max\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)\right\} = \frac{2}{3}$$
$$\|C\|_c = \max\left\{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{7}{12}$$
$$\|C\| = mín\left\{\frac{2}{3}, \frac{7}{12}\right\} < 1$$

10.5 Método de Jacobi:

Passo 1: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varepsilon = 0{,}1$

Passo 2:

$$\vec{x}^0 = C\vec{x}^0 + 1$$

$$x_1^1 = 0x_1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3} = 1$$

$$x_2^1 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + 0x_2 + \frac{1}{4}\cdot 1 + 1 = \frac{7}{6}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot 1 + 0x_3 + 1 = \frac{13}{15}$$

Passo 3:
Regra de Parada

$$\left|1 - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|1 - \frac{14}{12}\right| < \varepsilon$$

$$\left|1 - \frac{13}{15}\right| < \varepsilon$$

10.6 Método de Gauss-Seidel:

Passo1:

$$\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Passo 2:

$$\vec{x}^1 = C\vec{x}^0 + \vec{f}$$

$$x_1^1 = 0x_1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3} = 1$$

$$x_2^1 = -\frac{1}{4}\cdot 1 + 0x_2 + \frac{1}{4}\cdot 1 + 1 = 1$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\cdot 1 - \frac{1}{5}\cdot 1 + 0x_3 + 1 = 1$$

10.7 Atividades

1. Transformar as matrizes em fatores LU

1 2 3 1 2 3

lino@ufs.br

2	4	6		3	5	7
3	5	7		2	4	6

2. Escrever o algoritmo, e as formulas gerais para o método do elemento maior que funciona igual ao método de Gauss-Jordan sendo que a escolha do elemento pivô é o maior elemento da coluna em valor absoluto, entre as linhas que não contém elementos pivôs escolhidos. Fazer trocas de linhas para arrumar o sistema.

10.8 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD – 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515